

Permütasyon ve Kombinasyon Kavramları Lise Öğrencilerinin Zihninde Nasıl Anlamlandırılmaktadır

Esra KARATAŞ GÜLER^a, Abdulkadir TUNA^b

^aMilli Eğitim Bakanlığı, Kastamonu/Türkiye,
esrakrts@hotmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4493-1793>

^bKastamonu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Kastamonu/Türkiye,
atuna@kastamonu.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0003-3553-7513>

Geliş Tarihi: 08.07.2025

Kabul Tarihi: 19.07.2025

Anahtar Kelimeler:	Öz
permütasyon, kombinasyon, soyutlama, zihinsel temsil, yansıma matematik eğitimi Makale Türü: Araştırma	<p>Matematiksel düşüncenin geliştirilmesine ve biçimlendirilmesine temel teşkil eden sayma problemleri, öğrenciler için zor olabilir. Öğrencilerin sayma problemlerini çözerken yaptıkları hatalarının doğasını anlamak, yaşadıkları zorlukların tespit edilmesi ve yaşadıkları zorlukları etkileyebilecek değişkenlerin belirlenmesi ve yorumlanması için, sayma (kombinatorik) konusunun temelini oluşturan permütasyon ve kombinasyon kavramlarının kavramsallaştırmalarının daha derinden anlaşılması gerekmektedir. Bu çalışmada 10.sınıfta sayma konusunu gören 11.sınıf bir öğrencinin permütasyon ve kombinasyon kavramlarını zihninde nasıl anlamlandırdığı incelenmiştir. Araştırma, nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması ile yapılmıştır. Araştırmanın katılımcısı bir devlet (resmi) fen lisesinin 11. sınıfında öğrenim gören bir öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmada veriler araştırmacı tarafından geliştirilen problem durumlarını içeren çalışma kağıdı, yarı yapılandırılmış görüşme ve görüşme ses kayıtları aracılığıyla toplanmıştır. Çalışma kağıdı ve görüşmelerden elde edilen veriler içerik analizi ile değerlendirilmiştir. Öğrencinin permütasyon ve kombinasyon kavramlarının soyutlamasında ve başarılı bir sayma işlemi için etkin bir şekilde sergilenmesinde öğrencinin çarpma ilkesinin kavramsal gerekçelerini bilmesinin ve eylemlerini sorgulamasının etkili olduğu görülmüştür. Araştırmada, bireyin mevcut bilgilerinden yeni matematiksel kavramları soyutlamasında, anlamlandırmasında ve geliştirmesinde zihinsel süreçleri karakterize eden şemalar ve bu şemaları oluşturan zihinsel eylemlerin önemli rollere sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca çalışmada, öğretmenlerin öğrencilerin kavramsal ilerleme kaydedebilmeleri için öğrencilerin zihinsel temsillerini ve yansıma eylemlerini kullanacakları etkinlikler tasarlaması ve bu etkinliklerde öğrencilerin kendi çözüm yollarını belirleyip izlemelerini desteklemeleri önerilmektedir.</p>

How are the Concepts of Permutation and Combination Conceived in the Minds of High School Students?

Esra KARATAŞ GÜLER ^a, Abdulkadir TUNA ^b

^aMinistry of Education, Kastamonu/Türkiye,

esrakrts@hotmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4493-1793>

^bKastamonu University, Education Faculty, Kastamonu/Türkiye,

atuna@kastamonu.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0003-3553-7513>

Received: July, 08, 2025

Accepted: July, 19, 2025

Keywords:

permutation,
combination,
abstraction,
mental
representation,
reflection,
mathematics
education

Paper Type:

Research

Abstract

Counting problems are fundamental to the development and formation of mathematical thinking, but they can be challenging for students. In order to understand the nature of the errors students make while solving counting problems, to identify the difficulties they experience, and to determine and interpret the variables that may affect the difficulties they experience, it is necessary to understand the conceptualizations of the concepts of permutation and combination that form the basis of the subject of counting (combinatorics) more deeply. In this study, it was examined how an 11th grade student who studied counting in the 10th grade made sense of the concepts of permutation and combination in his mind. The research was conducted with a case study, which is one of the qualitative research methods. The study group of the research consisted of an 11th grade student studying at a formal science high school. In the research, data were collected through a worksheet containing problem situations developed by the researcher, semi-structured interviews, and interview audio recordings. The data obtained from the worksheet and interviews were evaluated with content analysis. It was observed that the student's knowledge of the conceptual justifications of the multiplication principle and questioning his actions were effective in the abstraction of the concepts of permutation and combination and in the effective display of a successful counting operation. The study concluded that the schemas that characterize mental processes and the mental actions that form these schemas play important roles in the individual's abstraction, meaning and development of new mathematical concepts from their existing knowledge. In addition, the study suggests that teachers design activities that will use students' mental representations and reflection actions so that students can make conceptual progress, and that they support students in determining and following their own solutions in these activities.

Giriş

Matematik sayma, ölçme ve hesaplama ihtiyacından doğmuştur ancak soyutlama yapmayı, mantıksal akıl yürütmeyi, örüntülerin araştırılmasını ve analizini içerecek şekilde gelişmiştir (Maher and Uptegrove, 2010). Matematikte saymadan soyutlamaya doğru bir akış bulunmaktadır. Sayma denilince insanın aklına basit, kolay ya da buna benzer şeyler gelebilir. Ancak sayma kombinatoriğin temel taşıdır ve bilinenin ya da tahmin edilenin aksine sayma(k) zordur (Martin, 2001). Kombinatorik, sonlu bir kümedeki nesnelere seçimini ve düzenlenmesini içeren bir hesaplama ilkesi olarak ele alınabilir (English, 2005). Okul matematiğinde kombinatorik, öğrencileri sayı sayma, varsayımlarda bulunma, genelleme yapma ve sistematik düşünme konularında eğitmek için, denklik, bağıntı, fonksiyon vb. birçok kavramın geliştirilmesinde, çok fazla diğer matematiksel kavramlara (veya matematiksel kavramların bilinmesine) bağlı olmadığı için farklı problemlerle öğrencilerin daha fazla matematik yapımlarına ihtiyaç duymalarını sağlamada kullanılmaktadır (Kapur, 1970; Batanero vd., 1997).

Son yıllarda, kombinatorik öğretimi ve öğrenimini araştıran önemli araştırmalar yapılmıştır. Araştırmacılar permütasyon ve kombinasyon gibi belirli problem türleri hakkında öğrencilerin akıl yürütmelerindeki farklılıkları (örn., Batanero, Navarro-Pelayo ve Godino, 1997), öğrencilerin çeşitli kombinasyon problemleri veya permütasyon problemleri içindeki farklılıkları algılayıp algılamadıklarını (örn., Lockwood vd., 2018), öğrencilerin sayma problemlerini çözerken hangi stratejileri kullandıklarını (örn., Melusova, ve Vidermanova, 2015), öğrencilerin zor kombinasyon veya permütasyon problemlerini çözerken hangi doğrulama stratejilerini kullandıklarını (örn., Eizenberg ve Zaslavsky, 2004), sayma problemleri çözme durumunda öğrenciler tarafından oluşturulan bağıntıları (örn., Lockwood, 2011), öğrencilerin öğretimin sonrasında permütasyon ve kombinasyon problemlerini çözme stratejilerinde değişiklik olup olmadığını (örn., Lamanna ve Batanero, 2022) araştırmışlardır. Ancak yapılan araştırmalar yeterli değildir çünkü matematik eğitiminde kombinatorik konusunda çok az çalışma vardır (Kavousain, 2008).

Kombinatorik, çeşitli şekillerde ve çeşitli temsil araçlarıyla çözülecek anlamlı problemler için temel sağlamaktadır (English, 2005). Kombinatorik (sayma problemleri), derin matematiksel düşünmeyi teşvik etmektedir ancak aynı zamanda çeşitli seviyelerdeki öğrenciler için çok fazla zorluk kaynağıdır (örn., Batanero vd., 1997; Eizenberg ve Zaslavsky, 2004; Lockwood, 2013; Lockwood, 2015; Lockwood, Wasserman ve McGuffey, 2018). Kombinatorik, öğretilmesi ve öğrenilmesi en zor matematik konularından biri olarak kabul edilmektedir (Melusova ve Vidermanova, 2015). Zira öğrencilerin kombinatorial (sayma) problemlerini doğru bir şekilde çözmekte zorlandıklarına dair çok sayıda belgelemiş kanıt bulunmaktadır (Lockwood vd., 2018). Araştırmacıların öğrencilerin kombinatorial problemler üzerindeki çalışmalarına daha yakından bakmalarına yani öğrenciler için belirli mücadele alanlarını belirlemeye ve öğrencilerin gelişebileceği potansiyel yollara odaklanmaya yani kombinatorial fikirleri kavramsallaştırma yollarına ilişkin daha fazla iç görüye ihtiyaç vardır (Batanero vd., 1997; Lockwood, 2013; Lockwood, 2015).

Kombinatorik, öğrencilerin numaralandırma, varsayımlar yapma, genellemeler yapma, ispat yapma ve sistematik düşünme vb. konularda eğitilmesine, zihinsel olarak gelişimine ve matematiğin güçlerini ve sınırlamalarını anlamasına katkı sağlamaktadır (Kapur, 1970). Bu anlamda saymaya dair matematiksel kavramların soyutlama süreçlerinin ele alınması soyutlama sürecinin daha iyi anlaşılması ve öğrenme süreçlerinin yapılandırılması bakımından önem arz etmektedir. Ülkemizde sayma konusu liselerin 10.sınıf matematik dersi müfredatında yer almaktadır. Sayma konusu, sayma ilkelerini, permütasyon ve kombinasyon kavramlarının tanımlarını ve permütasyon ve kombinasyon hesaplamalarına dair formülleri içermektedir. Öğrencilerin sayma problemlerini çözebilmesi için permütasyon ve kombinasyon formüllerini (veya ifadelerini) anlaması bir anlamda bu formülleri nerede ve nasıl kullanması gerektiğini

bilmesi gerekmektedir. Öğrencilerin sayma problemlerini çözerken yaşadıkları zorlukların tespiti için bu problemlerin çözüm sürecinde öğrencilerin akıl yürütmelerinin ayrıntılı incelenmesi yararlı görülmektedir. Bu anlamda, bu çalışmada “Permütasyon ve kombinasyon konusunu gören 11.sınıf bir öğrenci permütasyon ve kombinasyon kavramlarını nasıl anlamlandırmıştır veya geliştirmiştir?” sorusuna cevap aranmıştır.

Yöntem

Araştırma Deseni

Bu çalışmada öğrencilerin matematiksel kavramları soyutlama süreçlerini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda matematiksel kavramların nasıl inşa edildiği, bu inşa sürecinde katılımcının aldığı kararların nedenleri, algısı ve bakış açısı gibi kişiye özgü noktalara derinlemesine odaklanmak gerekmektedir. Bu bağlamda, soyutlama süreci, soyutlama sürecini etkileyen diğer faktörler de (çevre, deneyim gibi) göz önüne alınarak sürecin bütüncül bir anlayışla ele alınması, durumun tanıtılması ve ortaya konulması ve daha derin daha zengin veri elde edilmesi açısından önemli görülmektedir. Bütüncül bir anlayış, süreç odaklı olması, durumu etkileyen faktörlerin durumu nasıl etkilediklerinin ortaya konması ve yukarıda anlatılanlardan dolayı bu çalışmada nitel araştırma tekniklerinden durum çalışması uygun görülmüştür.

Bu çalışmada açıklanan örnek olay durumu, permütasyon ve kombinasyon konusunu 10.sınıfta görmüş olan 11.sınıf bir lise öğrencisinin permütasyon ve kombinasyon kavramları ile ilgili mevcut bilgisine ihtiyaç duyması, bu ihtiyacın gereği olarak zihninde bu kavramları nasıl yerleştirdiğine dair yollarını ve bu ihtiyacı takiben yeni problem durumlarında yeni matematiksel yapıları soyutlama sürecini araştırmak için tasarlanmış bir çalışmadır.

Katılımcı

Araştırma, Türkiye'nin kuzeyinde bulunan bir ilin resmi bir fen lisesinde 2023-2024 eğitim-öğretim yılında 11. sınıfta öğrenim gören bir öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Katılımcı, amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örneklemeyle belirlenmiştir. Amaçlı örneklemin mantığı ve gücü, derinlemesine anlamaya yaptığı vurgudan gelmektedir (Patton, 2013, s.46). Bu yöntem, araştırmanın amacı doğrultusunda bilgi açısından zengin durumların seçilerek derinlemesine araştırma yapılmasını sağlar (Şahan ve Uyangör, 2021, s.122). Zira, araştırmanın amacı da soyutlama süreci hakkında derin, ayrıntılı ve alana katkı sağlayan bilgiler ortaya koymaktır. Araştırmada soyutlama sürecinde sergilenen davranışları ortaya koymak amaçlandığından katılımcının iyi iletişim becerisine ve soyutlamanın gerçekleşmesi için gerekli ön bilgiye sahip olması gerekmektedir. Örneklemede kullanılan ölçütler, öğrencinin sınıf düzeyinin 11 olması, permütasyon ve kombinasyon konusunu okulda görmüş olması ve iletişime açık olması olarak belirlenmiştir. Ayrıca soyutlama ve anlamlandırma süreciyle ilgili ayrıntılı bilgi edinebilmek için bu araştırma tek öğrenci ile gerçekleştirilmiştir.

Araştırma için iyi matematik ders notlarına sahip ve kendini iyi ifade eden gönüllü bir öğrenci seçilmiştir. Araştırmacı, seçilen öğrencinin 9.sınıftan beri matematik ders öğretmenidir. Araştırmacı katılımcıyı derste, ders dışında gözlemlendiği ve diğer ders öğretmenlerinden edindiği bilgiler kadar tanımaktadır. Katılımcı, profesyonel olarak sporla ilgilenen 16-17 yaşlarında sosyal bir öğrencidir. Katılımcının tüm sınıf seviyelerinde matematik dersi not ortalamaları 85 puanın üstünde yani yüksektir. Katılımcı, düşüncelerini rahat bir şekilde ifade eden, bilgiyi ezberlemek yerine neden ve nasıl sorularını soran 10.sınıfta permütasyon ve kombinasyon konusunu görmüş zeki bir öğrencidir. Çalışma boyunca katılımcı gizliliğini korumak amacıyla katılımcının gerçek ismi yerine Esra takma adı kullanılmıştır.

Veri toplama araçları

Çalışmanın veri toplama sürecinin gerçekleştirilmesi için (göreve dayalı) çalışma kağıdı oluşturulmuştur. Çalışma kağıtlarının hazırlanması sürecinde öncelikle araştırmanın amacı temel alınmıştır. Ardından literatür incelenerek permütasyon ve kombinasyon konusunda soyutlama ile ilgili çalışmalar incelenerek öğrencilerin soyutlama sürecini ortaya koyacak şekilde görüşmede kullanılacak (çalışma kağıdındaki) problemler hazırlanmıştır. Çalışmada kullanılacak problemler için öncelikle alan yazın araştırılmıştır. Kitaplarda ve okunan makalelerde karşılaşılan problemler incelenmiş ve okunan kaynaklardan (örn., Lockwood, 2013 ve Özdemir, 2012) bazı problemler (1. aşama 5. soru ve 1. aşama 10.soru) dikkate alınmıştır. Öğrencilerin permütasyon ve kombinasyon konusunda soyutlama süreçlerini gözlemlemek ve bu süreçte gerçekleştirilen zihinsel eylemleri incelemek amacıyla problemler geliştirilmiştir. Geliştirilen problemlerin araştırmanın amacını gerçekleştirmeye uygun olup olmadığını belirlemek için uzman görüşüne sunulmuştur. Bunun sonucunda çalışma kağıdının 1.aşama 8. sorusunda verilen şeklin kaç bölgeden oluştuğunun tam olarak anlaşılmadığı ve bu soruda verilen şeklin kaç bölgeden oluştuğunun soruda belirtilmesinin gerekli olduğu belirtilmiştir. Uzman görüşü dikkate alınarak 1.aşama 8.sorusuna gelindiğinde araştırmacı tarafından soruda bulunan şeklin bölge sayısının üç olduğu belirtilmiştir. Bunun yanında araştırmanın amacına ulaşması ve katılımcı ile görüşme sürecinin daha sağlıklı ilerlemesi için çalışma kağıdının uygulanma sürecinde dikkat edilecek noktaların tespiti için matematik seviyesi farklı iki öğrenci ile pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışma yaklaşık 1-1,5 saat sürmüştür. Pilot çalışmada öğrencilerin özellikle son sorularda kafalarının karıştığı ve bu karışıklıkta öğrencilerin sorularla uğraşmaktan vazgeçme ihtimallerinin arttığı gözlemlenmiştir. Bu sebeple katılımcının zihnini toparlaması için kısa bir süre mola vermenin çalışmanın amacına ulaşması bakımından faydalı olduğunu düşündürmüştür. Pilot çalışma sonucunda, problemlerin soyutlama ve zihinsel eylem süreçlerini gözlemlemeye uygun olduğu ve çalışmanın uygulama sürecinde öğrenciye problem çözerken ihtiyaç duyarsa çalışmaya ara verilmesi gerektiği görülmüştür.

Verilerin Analizi

İçerik analizi, toplanan verileri açıklayabilecek kavram ve ilişkilere ulaşabilmek amacıyla gerçekleştirilir (Akbulut, 2013). İçerik analizinde birbirine benzeyen veriler belirli kavramlar ve temalar etrafında bir araya getirilir. Daha sonra bunların içindeki anlamlı birimler oluşturulur ve bu anlamlı birimler düzenlenerek yorumlanır. İçerik analizinde derin bir analiz söz konusudur. Öyle ki, içerik analizi hiç tahmin edilmeyen, içinde gizli kalmış temaların ve boyutların ortaya çıkarılmasına olanak tanır (Akbulut, 2013). Bu çalışmada soyutlama süreci ve bu süreçte gerçekleştirilen zihinsel eylemleri araştırmak için derinlemesine ve detaylı bir çalışma yapıldığından ve ayrıca ortaya belirli durumlar konulup süreçlerin bu durumlar içindeki ilerleyişi sırasında yeri incelendiğinden verilerin analizinde içerik analizini gerçekleştirmenin daha uygun ve gerekli olduğu düşünülmüştür.

İçerik analizinde görüşme, gözlem veya dokümanlar yoluyla elde edilen nitel araştırma verileri dört aşamada analiz edilmektedir (Akbulut, 2012; Yıldırım ve Şimşek, 2021): Verilerin kodlanması, temaların bulunması, kodların ve temaların düzenlenmesi ve bulguların tanımlanması ve yorumlanmasıdır. Çalışmada da verilerin analizinde bu dört aşama dikkate alınmış ve bu aşamalar aynı sıra takip edilerek kullanılmıştır.

Veri analizi için öncelikle görüşme sırasında kaydedilen konuşmalar yazılı metne dönüştürülmüştür. Daha sonra görüşme metinlerinde bulunan cümleler kelime kelime analiz edilmiştir. Bu süreçte araştırmanın konusu olan soyutlama süreci ve bu süreçte gerçekleşen zihinsel temsil eylemlerini derinlemesine incelemek adına ses kayıtları içinde bulunabilecek soyutlama sürecini etkileyecek detayları kaçırmamak ve zihinsel temsil eylemlerini analiz etmek adına ses kayıtları tekrar tekrar dinlenmiştir. Görüşmenin yazıya geçirilmesi ve tekrar gözden

geçirilmesinin ardından veriler bilişsel bileşenler ile bunların alt bileşenlerine göre analiz edilmiştir. Bu bağlamda Glasersfeld'in zihinsel temsiline göre yazılı görüşme metinlerinin analiz için belirlenmiş olan temalar; içselleştirme, yansıma, özümseme, uyum ve zihinsel temsildir. Verilerin kodlama sürecinde öncelikle zihinsel eylemlerin her bir alt bileşenin ana göstergeleri iki yazar tarafından belirlenmiştir (Tablo 1). Verilerin analizinde beklenti ifadesi, Glasersfeld'in kullandığı anlamda öğrencinin bir etkinliği gerçekleştirmeden önce etkinliği gerçekleştirmenin belirli bir sonuca yol açacağını fark ettiği durum olarak kullanılırken şema terimi ise kişinin bir durum karşısında yaptığı eylemleri veya kullandığı zihinsel süreçleri ifade etmektedir.

Tablo 1. Zihinsel eylemlerin göstergeleri

Zihinsel eylemler	Gösterge
İçselleştirme	<i>Deneyimden elde edilen bilgileri bilerek veya isteyerek davranışa geçirmek Kazanılan davranışı sergilemek (veya öğrenilen bilgiyi kullanmak) Kazanılan davranışı tekrarlamak</i>
Yansıma	<i>Deneyimi veya tecrübeyi gözden geçirmek veya düşünmek, incelemek Deneyime dayalı öngörüde bulunmak Deneyime dayalı çıkarım yapmak Elde edilen çıkarımları değerlendirmek</i>
Özümseme	<i>Yeni bilgiyi, malzemeyi veya durumu mevcut deneyimsel anlayışlara göre uyarlamak veya uydurmak Yeni malzemeyi bilinen bir şeyin örneği olarak ele almak</i>
Uyum	<i>Mevcut şemanın yeni duruma göre iyileştirmek ya da düzenlenmek Mevcut deneyimleri kısıtlayarak yeni duruma uyumlu hale gelmek</i>
Zihinsel temsil	<i>Deneyimsel dünyasında başka bir zamanda mevcut olan bir şeyin tekrarının ortaya çıkması Bilincine önceki bir deneyimi getirmek veya deneyimi oluşturan mecazi malzemenin (sistemin üretebildiği temel duyuşsal öğelerin) anımsanması Matematikselleştirilebilir bir durumu, bir problemi, çözümünü bireyin anlamlandırması için geçmişteki bir deneyimi, onunla mevcut bir deneyim arasında karşılaştırarak duyuşsal malzemenin dikkatli bir şekilde seçilmesi, gruplandırılması ve koordine edilmesi ve duyuşsal hammaddenin yerini alacak bir şeylerin üretilmesi</i>

Glasersfeld'e göre yapıcı süreçler yalnızca bir tepkinin doğruluğundan değil, ona yol açan mücadeleden çıkarılabilmektedir (Cifarelli ve Sevim, 2014). Glasersfeld'in düşüncesi doğrultusunda verilerin analizinde öğrencinin sahiplenebileceği problem durumu (durumları) üzerinden, öğrencilerin ön bilgileri doğrultusunda mevcut durumu özümsemesine, problem ile ilgili hedeflerine ulaşmak için geliştirdikleri zihinsel eylemlerine (işlemlerine) ve bu hedeflenenlere yani sonuca dair eylemlerine ve beklentilerine odaklanılmıştır. Ses kayıtları ve öğrencinin çalışma kağıtları bağımsız iki araştırmacı tarafından incelenerek soyutlama sürecinin ilerlemesi araştırma problemi çerçevesinde betimlenmiş ve bu betimlemeler yorumlanmıştır.

Yapılan yorumları daha cazip kılmak için görüşmelerde elde edilen verilerin özü korunarak doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Son olarak da, bu bulgular arasındaki ilişkileri açıklamak ve bir takım sonuçlar çıkarmak üzere verilere dayalı olarak yorumlamalar yapılmaya çalışılmıştır.

Geçerlik ve Güvenilirlik

Bilimsel araştırmalarda “geçerlilik” ve “güvenilirlik”, sonuçların inandırıcılığı için önemli iki ölçüttür (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Lincoln ve Guba (1985), nitel araştırmaların kalitelerinin artırılması için geçerlilik yerine inandırıcılık (iç), aktarılabilirlik (dış); güvenilirlik yerine güvenilebilirlik (tutarlılık) ve onaylanabilirlik (teyit edilebilirlik) kavramlarını kullanmayı tercih etmişlerdir (Aydın ve Beyazıt, 2021; Çepni, 2021; Yıldırım ve Şimşek, 2021). Nitel bir araştırma olan bu çalışmada araştırmanın daha nitelikli olması için Lincoln ve Guba ’nın geçerlilik ve güvenilirlik yerine kullandıkları kavramlar (inandırıcılık, aktarılabilirlik, tutarlılık ve onaylanabilirlik) temel alınarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak çalışmanın geçerliliği ve güvenilirliği sağlanmaya çalışılmıştır. Çalışmada inandırıcılığın sağlanabilmesi için, veri kaynağı ile uzun süreli etkileşimler gerçekleştirilmiş ve yapılan görüşmeler daha derin bilgilere ulaşmak için katılımcıya ayrıntılı sorular sorularak gerçekleştirilmiştir. Görüşme esnasında katılımcının verdiği cevaplar özetlenerek katılımcının teyidi alınmış ve araştırmacı tarafından katılımcının cevaplarına müdahale edilmemiştir. Araştırmacı tarafsız olarak, katılımcının cevaplarını ve davranışlarını yönlendiren davranış ve tutumlardan kaçınmıştır. Ayrıca araştırmacı görüşmelerden elde ettiği verilerden çıkardığı yorumları ve anlamları katılımcı ile paylaşım bunların geçerliliğine dair değerlendirme yapmasını istemiştir. Araştırma sonucunun aktarılabilirliği için, elde edilen verilerin bulgular kısmında ayrıntılı betimlemesi yapılarak doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Çalışmada teyit edilebilirliği sağlamak için araştırmacılar verilerin analizinde elde ettiği sonuçlar ile topladığı verileri yani ham verileri sürekli olarak karşılaştırmış ve geri döndüğünde elde edilen sonuçların teyit edilip edilmediğini değerlendirmiştir. Bununla birlikte ham verileri, analiz aşamasında yaptığı ayrımları veya göstergeleri, rapora temel oluşturan algıları, notları ve veri toplama araçları (çalışma kağıtları) saklanarak teyit edilebilirlik artırılmıştır. Çalışmanın tutarlılığı için, verilerin analizi aynı araştırmacı tarafından farklı zamanlarda tekrar karakterize edilerek tutarlılığı incelenmiştir.

Bulgular

Araştırma kapsamında yapılan görüşmelerde Esra’nın bilgiyi soyutlama ve anlamlandırma süreci Glaserfeld’in zihinsel temsili ve eylemleri dikkate alınarak incelenmiştir. Esra’nın bilgiyi soyutlama ve anlamlandırma süreci, çalışma kağıdında yer alan problemlerin aşamaları göz önünde bulundurulmuştur. Bu doğrultuda verilerin analizinden elde edilen bilgiler, 1.aşama ve 2.aşama başlıkları altında aşağıda sunulmuştur.

1. Aşama

1. aşamanın ilk üç sorusunda öğrenciden permütasyon kavramını, kombinasyon kavramını ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi açıklaması istenmiştir (Şekil 1).

- 1) Permütasyon denince aklınıza ne gelmektedir? Permütasyon kavramını kısaca açıklayın.
- 2) Kombinasyon denince aklınıza ne gelmektedir? Kombinasyon kavramını kısaca açıklayın.
- 3) Permütasyon ve Kombinasyon arasındaki ilişkiyi(farklar, benzerlikler gibi) kısaca açıklayın.

Şekil 1. Esra’nın 1. aşama 1., 2. ve 3. sorusu

Esra, ilk üç soruda permütasyon ve kombinasyon kavramlarının tam olarak tanımını yapamayacağını belirtip, permütasyon dendiğinde aklına sıralama, kombinasyon dendiğinde de aklına seçme geldiğini söylemiştir. Araştırmacı da bunun üzerine Esra’dan tanım yapmasını beklemediğini, bu kavramlar söylendiğinde zihninde neler canlandığını anlatmasını istediğini

söylemiştir. Bunun üzerine Esra, bu kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi bir örnek üzerinden açıklamaya çalışmıştır. Esra'nın ilk üç soruya verdiği cevaplardan matematiksel kavramların tanımlarını yapamasa da bu kavramları *bildiği* anlaşılmaktadır. Aşağıda geçen konuşmalardan, Esra'nın 10.sınıfta sayma konusunda *kazandığı davranışları hatırlayıp kullandığı görüldüğünden permütasyon denince sıralama, kombinasyon denince seçme bilgisini kullandığı şeklindeki davranışları içselleştirdiği* söylenebilir. Esra'nın permütasyon ve kombinasyon kavramı hakkındaki düşünceleri aşağıda sunulmuştur:

Esra : “Permütasyon sıralama... Sıraları fark etmez, hiç tanım yapamam...”

Araştırmacı : “Tanım istemiyorum zaten. Hani bizim buradaki amacımız tanım yapman değil zaten. Kafana o an kavramla ilgili gelen resim nedir? Ya da ben bunu böyle anlatırım gibi...”

Esra : “Mesela altı tane kalem var hepsi farklı renkte. İki tanesini seçeceğim. Ama ikisinin sırası önemlidir. Önce kırmızıyla maviyi seçersem farklı; maviyle kırmızı seçersem farklı olur. O yüzden altı alırım bir kere. Altısından biridir. Direkt altının birisiyle beşin birisini yapabilirim (Altının ikili permütasyonundan bahsetmektedir). Kombinasyon denince aklımıza seçme gelmektedir. Bu da işte klasik, burada da sıralama yok (kombinasyonu kastediyor). Altı tane kalem var, hepsi farklı renkte. Farklı iki tanesini seçeceğim. Sıralamanın önemi yok gibi...”

Esra : “Kombinasyon sırasında ilişkiler farklı, kombinasyonda daha çok seçme. Bunu zaten siz söylüyorsunuz (söylediğinin doğruluğunu anlatmak için doğrulama kaynağı olarak ders öğretmenini gösteriyor). Permütasyonda sıralama... Başka aklıma gelen bir şey yok.”

Birinci aşamanın 4. sorusunda genel olarak öğrencinin ön bilgilerine dayalı rutin problemler ile şu ana kadar karşılaşmadığı rutin olmayan problemler bulunmaktadır (Şekil 2 ve Şekil 3). 4. soruda (sayma ilkeleri, permütasyon ve kombinasyon kavramlarına dayalı) rutin problemlerde Esra, problemlerin ilişkili olduğu ön bilgileri (örn., permütasyon ve kombinasyon) *hatırlamış (tanımış)* ve gerektiğinde *geçmiş deneyimleri ile ilişkilendirerek* rahat ve hızlı bir şekilde problemlerin bir çoğunu çözmüştür. Problemlerin çözümünde permütasyon ve kombinasyon ifadelerinin rahat ve hızlı bir şekilde *kullanmış* olması, öğrencinin bu kavramlara hakim olduğunun ve bu kavramları pekiştirmiş olduğunun çok açık bir göstergesidir. Ancak Esra, bu aşamada sorulan doğru yanlış sorularının bazılarında zorlanmıştır. Özellikle (permütasyon ve kombinasyon arasındaki ilişkiyle ilgili olan) 4. sorunun ilk beş şıkkındaki ifadelerin (önergelerin) doğruluk değerlerini tespit etme konusunda zorluk yaşamıştır (Şekil 2). Çünkü zihninde buna dair oluşturduğu *eylem şemaları* veya *içselleştirdiği eylemler* ya duruma uygun değildir ya da istediği sonuca ulaştırmasına yardımcı olmamıştır. Esra, bu soruların çözümleri için zihninde varsayımlar oluşturmuştur.

4) Aşağıdaki ifadelerden doğru olanları(D) ve yanlış olanları (Y) şeklinde yazınız. Yanlış cevabı verdiğiniz sorular için doğru ifadeleri veya doğru cevapları yazın.

- Bir kümenin permütasyonları aynı zamanda aynı kümenin kombinasyonlarıdır. (Y)
- Bir kümenin kombinasyonları aynı zamanda aynı kümenin permütasyonlarıdır. (D)
- Bir kümenin permütasyonları o kümenin alt kümeleridir. (Y)
- Bir kümenin kombinasyonları o kümenin alt kümeleridir. (Y)
- Bir kümenin permütasyonları, kombinasyonlarının alt kümesidir. (Y)

Şekil 2. Esra'nın 1. aşama 4. sorusunun ilk beş şıkkına verdiği cevaplar

Esra, 4. sorunun ilk beş şıkkı için zihninde oluşturduğu çözümün ya da çözüm yollarının doğruluğunu kendine göstermek için rastgele kümeler alıp bu kümelerin permütasyon, kombinasyon ve alt küme sayısını bulmaya çalışmıştır. Yani sorunun çözümü için ön bilgilerini

işe koşmuştur. Esra'nın bir kümenin permütasyonları, kombinasyonları ve alt kümeleri arasında var olan ilişkiyi bulmak için bir kümenin permütasyon, kombinasyon ve alt küme sayısını hesaplayarak bulduğu sonuçları nasıl ele aldığı (veya ilişkilendirdiği) ile ilgili görüşme kesitleri aşağıda sunulmuştur:

Esra : “Bir kümenin permütasyonu aynı zamanda o kümenin kombinasyonlarıdır. Sanki bir kümenin permütasyonları o kümenin kombinasyonu değil de sanki bir kümenin kombinasyonları o kümenin permütasyonlarıdır. Aynen ilki yanlış yani ikincisi doğru herhalde... Bir kümenin permütasyonu o kümenin alt kümesidir diyor. Mesela, dört tane eleman var. Kaç tane permütasyonu var bunun? On iki tane. İki üzeri dört, on altı. On altı tane alt kümesi varmış ama 12 tane permütasyonu varmış. Ama şey, aynen doğru... Çünkü iki tane seçebilirim işte. Üç elemanlı olabilir, dört elemanlı olabilir ya da elemansız olabilir. Artı bir, o yüzden doğru. Değil mi? (yansıma) ... Bir kümenin permütasyonları o kümenin alt kümeleridir. Aynen. Mesela 4 tane eleman var burada. Bir tanesini seçebilirim 4 farklı ihtimal, 2 tanesini seçebilirim, 12 tane 3...”

Araştırmacı : “AA da olur mu permütasyon?”

Esra : “Permütasyon AA olmaz, olur mu? Olmaz bir tane eleman seçilmez herhalde, seçilir mi? AA seçilmez permütasyon. Şey, alt küme herhalde... A seçeceksek bir elemanlı alt kümesi olur. Bir elemanlı 4 tane alt kümesi var, 2 elemanlı 13 tane alt kümesi var. 3 elemanlı, 3 elemanlı 4 tane alt kümesi var. Sıfır elemanlı da bir tane alt kümesi yok mu? 4 elemanlı bir tane alt kümesi var. Sıfır elemanlı da bir tane alt kümesi var. 8, 21, 22, 16... o zaman kombinasyonları bir kümenin kombinasyonları. Aslında o zaman burada sıralama fark etmiyor mu? Sıralama fark etmiyor (yansıma). O zaman buradan bu yanlış kombinasyon doğru oluyor. Permütasyon, kümenin alt kümesidir diye. Neden olmaz? (yansıma)...Dördün sıfırlısı aynen kombinasyonu olacak çünkü seçiyoruz. Mesela dördün sıfırlısı, sıfır elemanlı bir değil mi? Dördün ikilisi 6. Dördün üçlüsü 4, 4 aynen öyle olması lazım galiba yani kombinasyon deyince sanki baktığımızda onu geliyordu. Kombinasyon mesela şeyden önce yine 4 elemanlı var. Dördün sıfırlısı bir, dördün ikilisi, 6 dördün üçlüsü kaç 4 sen hep sayısal veriler üzerinden gidiyor. Evet, çünkü biliyoruz zaten alt küme sayısını 2 üzeri 4, 16 tane alt kümesi olması lazım. Sıfır elemanlı 1, 2 elemanın 6 o zaman net gibi... toplayınca 16 olunca kombinasyon oluyor direk ... Kombinasyonlar bir kümenin alt kümesi deymiş demek ki sıralama fark etmeden eleman seçimi oluyor burada. Permütasyonları alt kümesi olur mu olmuyor, fazla çıkıyor çünkü hatta 2 katı 2 katı değil, 2 katından bir eksik çıkabilir. Çünkü artı bir, sıfır elemanlı var (Bir kümenin sıfır elemanlı alt küme sayısını kastediyor). 2 katına çıkma sebebi de şu, AB ile BA'yi farklı şey olarak alıyoruz permütasyonda ama alt küme seçtiğimiz zaman AB ile BA aynı şey 2 katının bir fazlası gibi bir şey çıkar. Öyle mi? (yansıma)”

Esra : ”Bir kümenin permütasyonları kombinasyonlarının alt kümesidir (soruyu okuyor). Hayır, kombinasyon, permütasyon aynen permütasyon kombinasyonun alt kümesi oluyor (özümseme). Çünkü permütasyon daha geniş kapsamlı bir şey. Her kombinasyon permütasyon dahil oluyor gibi bir şey sanki.”

Esra, bir kümenin permütasyon, kombinasyon ve alt küme sayılarının büyüklük ve küçüklük ilişkisini, aldığı bir kümenin permütasyonları, kombinasyonları ve alt kümeleri arasında kapsama veya alt küme bağıntısına *entegre ederek (özümseyerek)* problem durumları (önergelerin doğruluk değerlerini bulmak) için kendine göre bir çözüm yolu geliştirmiştir. Bir anlamda *deneyimlerini gözden geçirerek çıkarımda bulunmaya çalışmıştır*. Esra, 4.soruda verilen

önermelerin doğruluk değerleri için geliştirdiği, ortaya koyduğu veya uyarladığı çözüm yolunu kullanarak doğru sonuca ulaşabileceğini belirterek, bir *beklenti* içinde olduğunu göstermiştir. Esra, bir kümenin permütasyon, kombinasyon ve alt küme sayılarını hesaplayarak önermelerin doğruluk değerlerini bulabileceğini fark etmiştir. Esra, çözüm yolunu zihninde oluşturduktan sonra, bir kümenin permütasyon, kombinasyon ve alt küme sayılarını hesaplayarak, bulduğu sayısal değerlere göre önermelerin doğru veya yanlış olduğuna karar vermiştir. Bu şekilde potansiyel çözüm faaliyetinin sonuçlarını üretmek bunlardan *çıkarımlar yapmıştır*. Dolayısıyla potansiyel eylemlerini zihinsel olarak gözden geçirdiği ve karşılaşacağı sorunu görüp üzerinde daha fazla düşünebilmesini mümkün kılan *zihinsel bir temsili* ifade ettiği sonucuna varılabilir.

- A dan B ye 3 yol, B den C ye 2 yol vardır. B den geçmek koşuluyla A dan C 'ye 5 farklı yol vardır. (5)
- 13 kişinin bulunduğu bir grupta en az 2 kişi aynı ayda doğmuştur. (D)
- Yanda 4 bölmeli bir kitaplık ve 5 kitap bulunmaktadır. Bu kitaplar kitaplığın her bir bölümünde en az bir kitap olacak şekilde yerleştirilirse kitaplığın en az bir bölümünde en az iki kitap bulunur (2)
- Üç harfli bir kelimenin harfleri ile anlamlı anlamsız üç harfli kaç kelime 6 kelime yazılır? (3)

Şekil 3. Esra'nın 1. aşama 4. sorusunun son dört şıkkına verdiği cevaplar

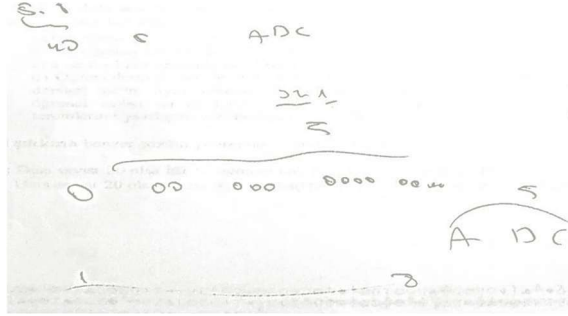
4.sorunun son dört şıkkına gelindiğinde, bu şıkların ilki olan yol sorusunda öğrenci çarpma ilkesini kullanarak cevabın üç çarpı ikiden altı olduğunu bulmuştur (*içselleştirilmiş eylem*) (Şekil 3). Yol sorusunu takip eden “13 kişinin bulunduğu bir grupta en az 2 kişi aynı ayda doğmuştur” ve “4 bölmeli bir kitaplık ve 5 kitap, kitaplar bu kitaplığın her bir bölümünde en az bir kitap olacak şekilde yerleştirilirse kitaplığın en az bir bölümünde en az iki kitap bulunur” önermelerinin doğruluk değerlerinde öğrenci 1.aşamada kurduğu mantığı (Güvercin yuvası ilkesi) işlemsel bilgiye dönüştürerek doğru cevaba ulaşmıştır. Bu sorunun son şıkkında, yani “üç harfli bir kelimenin harfleri ile anlamlı anlamsız üç harfli 6 kelime yazılır” önermesinde Esra, harflerin birden fazla kullanılabilme durumunun söz konusu olduğu için altı kelimedenden daha fazla kelime yazılabileceğini ifade etmiş ve önermenin yanlış olduğunu söylemiştir. Bu sırada araştırmacı öğrenciye harflerin birbirinden farklı olup olmadığının belirtilmediğinin ve kelimenin harflerinin aynı olabileceğini söylemiştir. Esra, bunun üzerine harflerin aynı olma durumunda yazılabilecek kelime sayısının daha az olacağını belirterek sorulara kaldığı yerden devam etmiştir. Öğrenci “aklıma gelmedi” veya “evet o durum da vardı, unuttum” gibi cümleler kurmamıştır. Esra verdiği cevabın yeterli olduğunu düşündüğü için diğer durumu (harflerin aynı olma durumunu) ele alma ihtiyacı duymamıştır. Bu durum, öğrencinin bir ifadenin yanlış olduğunu göstermek için o ifadeyi sağlamayan bir örnek verilmesinin ifadenin yanlış olduğunu göstermesi adına yeterli olduğunu bildiğini göstermektedir. Sonuçta, Esra'nın problem çözümlerinde ne yaptığını, neden yaptığını ya da problem çözümünün ne kadarının yeterli olduğunun farkında olduğu net bir şekilde görülmektedir. Esra bu sorularda *öğrendiği veya kazandığı davranışları tekrarlamıştır* (örn. çarpma ilkesi).

5) Dolapta 5 özdeş elma ve 8 özdeş portakal vardır. Dolaptan (meyve almaya karar verdin. En az bir meyve dolaptan alacaksın. Kaç farklı seçim yapabilirsin? (5) (3)

Şekil 4. Esra'nın 1. aşama 5. soruna verdiği cevap

Esra, 5. soru yani özdeş elma ve portakal sorusuna geldiğinde sorunun çözümünde tereddüt etmiştir (Şekil 4). Öğrenci problem durumu ile karşılaştığında, problemin çözümü için ilk olarak problemin sonuç kümesini oluşturmuş ve oluşturduğu sonuç kümesini söylemiştir. Öğrencinin ifade ettiği sonuç kümesi, öğrencinin soruyu anladığını göstermiştir. Sonuç kümesini zihninde oluştururken problemin çözümünde çarpma ilkesini kullanması gerektiğine karar vermiştir. Esra,

doğru çözüm yaklaşımı ile problemde ilerlerken hiç beklenmedik bir anda (doğru çözüm yolu ile ilerlerken ve sorulan bir soru yokken) problemin çözümü için farklı bir yola ihtiyaç duymuştur. Esra'nın kullandığı ikinci yol, sorunun çözümünde kombinasyon bilgisini *kullanmasıdır*. Bu durum sorunun soru kökündeki seçme kelimesinden kaynaklanmıştır. Çünkü seçim söz konusu olduğunda *zihinsel şemasında içselleştirmiş* olduğu eylem (seçme varsa kombinasyon bilgisini kullan) kombinasyon bilgisini kullanmadır. Ancak ilk anda kombinasyon ifadesini kullanması daha mantıklı bir yaklaşım olarak görünse de problemdeki durumun özelliğini (yani meyvelerin özdeş olma durumunu) fark etmediğinden yanlış bir çözüme götüren yola devam etmiştir. Problemin çözümü için yaptığı işlemlerin sonucunun sayısal olarak beklediğinden çok büyük gelmesi kafasını karıştırmıştır. Yaptığı işlemin beklediği sonucu vermemesi Esra'yı tedirgin etmiştir. Bunun üzerine problemin çözümünde nerede hata yaptığını düşünmeye başlamış ve yaşadığı sorunun kaynağını bulmaya çalışmıştır. Bu süreçte Esra'nın bu tedirginlikten kurtulmak için bir çözüm yolu arayarak *zihinsel olarak tekrar dengeye kavuşmak* istediği açıkça anlaşılmaktadır. Esra, seçim söz konusu olduğunda kombinasyon bilgisinin kullanılması gerektiğinin ancak problemin aslında daha önceden karşılaştığı kombinasyon sorularına benzemediğinin farkındadır.



Şekil 5. Esra'nın 1. aşamadaki 5. soruya yaptığı çözüm

İkinci çözümde öğrenci nesnelere (meyvelerin) özdeş nesnelere olduğunu dolayısıyla özdeş nesnelere seçim durumunun farklılığı gözden kaçırmış ve özdeş beş nesneden iki tanesini alma ile beş nesneden ikisini seçme durumunu *anlamlandıramamıştır*. Aslında Esra *karşılaştığı problemi daha önceden karşılaştığı problem durumları ile karşılaştırıp hangi problem türü ile bağlantı kuracağı* konusunda zorlanmıştır. Daha sonra bu zorluğu aşmak için açıkça saymaya çalıştıkları şeyleri söyleyerek ve yazarak tekrar sonuç kümesine odaklanmış ve ilk çözümünde olduğu gibi çarpma ilkesini (*kazanılmış davranış*) kullanarak problemi çözmüştür. Özdeş portakal ve elma sorusunda Esra, sahip olduğu mevcut yapılarına rağmen, bu problemi kategorize etmede güçlük çekmiştir. Bu durumdan problem durumunda saymaya çalıştıkları şeylere yani sonuç kümesine odaklanıp, çarpma ilkesinin mantığını kullanarak kendine bir çıkış yolu oluşturmuştur (Şekil 5). Bu sırada araştırmacı ile Esra arasında şöyle bir diyalog gerçekleşmiştir:

Esra : “ Ya elma alırım ya da portakal alırım. Şey değil mi? Sıfırları dahil etmeyeceğim, uzun uzun çarpa çarpa mı gitsem? Ya da öyle yapıyım. Ya da toplam ihtimalden olmayanı da çıkarabilirim. Permütasyon mu bu? Bu kombinasyon. Bir tane elma alabilirim, iki tane elma alabilirim...5 farklı şekilde seçebilirim. Bundan da 8 farklı seçebilirim. Kırk değil mi direk?”

Esra : “ Beşin birlisi çarpı, sekizin birlisi artı beşin birlisi çarpı beşin ikilisi artı beşin birlisi... Biraz uzamış oluyor sanki. Fazla oluyor ama (bulduğu cevap beklentisini karşılamıyor, tedirgin oluyor) ...”

Araştırmacı : “ Sayısal olarak fazla sanki...”

Esra : “Ama öyle de olabilir (soruyu okuyor)... Portakallar özdeş diyor o zaman... Portakallar özdeş ise...”

Araştırmacı : “ Portakalların aynı olduğunu, hangisini aldığının önemli olmadığını ifade ediyor.”

Esra : “Bir tane alabilirim, iki tane alabilirim, üç tane alabilirim, dört tane alabilirim ya da beş tane alabilirim. Bunlardan alırsam buradan beş ihtimal oluyor. Buradan bir tane alabilirim, iki tane alabilirim... Buradan da sekiz ihtimal oluyor. Her ikisinden bir tane alırsam, beşin birliği ve sekizin birliğinden kırk var ama sadece bundan bir tane alabilirim, bundan da bir tane alabilirim (bir tane bundan ya da bir tane bundan ile bir tane elma ve bir tane portakalı almayı kastediyor). O zaman kırk iki tane. Çünkü şöyle (*yansıma*)...Bir tane elma, iki tane elma, üç tane elma, dört tane elma, beş tane elma (elmaları temsilen çiziyor). Burada beş ihtimal var. Ben bunlardan birini seçeceğim. Burada da bir tane iki tane sekize kadar gidiyor. Benim sekizinden bir tanesini kesinlikle seçmem gerekiyor (Sonuç kümesini zihninde canlandırıyor). Kırk var bir kere elde. Ama bu durum ikisinden de aldığımız zaman. Şimdi diyor ki en az bir tane al diyor, ikisinden de almana gerek yok diyor. O zaman bir kere bunu silerim. Bundan beş farklı olasılıkla alabilirim beş. Beş; bir, iki, üç, dört, beş diye. Bundan da sekiz alabilirim. Kırk artı on üç elli üç sanki...”

Esra : “Bu sınavda çıksa uzun mu olurmuş sanki? İyiymiş...(Soruda zorlandığımı ama sorunun güzel olduğunu ifade ediyor).”

Esra, 6., 7. ve 8. soruyu ön bilgilerini (çarpma ilkesi ve permütasyon) *kullanarak* bu soruları tereddüt etmeden çözmüştür (Şekil 6). 6. soruda ESRA kelimesinin harflerini istediği kadar kullanabileceğini düşündüğü için sorunun cevabını dört çarpı dört çarpı dört çarpı dört (4.4.4.4) şeklinde bulmuştur.

az bir meyve alırsan buradan beş ihtimal oluyor. Buradan bir tane alabilirim, iki tane alabilirim, üç tane alabilirim, dört tane alabilirim ya da beş tane alabilirim. Bunlardan alırsam buradan beş ihtimal oluyor. Buradan da sekiz ihtimal oluyor. Her ikisinden bir tane alırsam, beşin birliği ve sekizin birliğinden kırk var ama sadece bundan bir tane alabilirim, bundan da bir tane alabilirim (bir tane bundan ya da bir tane bundan ile bir tane elma ve bir tane portakalı almayı kastediyor). O zaman kırk iki tane. Çünkü şöyle (*yansıma*)...Bir tane elma, iki tane elma, üç tane elma, dört tane elma, beş tane elma (elmaları temsilen çiziyor). Burada beş ihtimal var. Ben bunlardan birini seçeceğim. Burada da bir tane iki tane sekize kadar gidiyor. Benim sekizinden bir tanesini kesinlikle seçmem gerekiyor (Sonuç kümesini zihninde canlandırıyor). Kırk var bir kere elde. Ama bu durum ikisinden de aldığımız zaman. Şimdi diyor ki en az bir tane al diyor, ikisinden de almana gerek yok diyor. O zaman bir kere bunu silerim. Bundan beş farklı olasılıkla alabilirim beş. Beş; bir, iki, üç, dört, beş diye. Bundan da sekiz alabilirim. Kırk artı on üç elli üç sanki...”

6) ESRA kelimesinin harfleri ile anlamlı anlamsız dört harfli kaç kelime yazabilirsin? Kelime 20 harfli olsaydı bu kelimenin harfleri ile anlamlı anlamsız yirmi harfli kaç kelime yazabilirsin? 40

7) Dört arkadaş yan yana kaç farklı poz verebilir? Dört yerine 100 arkadaş olsaydı bu durumda yan yana kaç farklı poz verilebilirdi? 96!

8) Elinizde 5 farklı renk var. Aşağıdaki şekli kaç farklı şekilde boyayabilirsin? Her bir şekil birbirinden farklı renkte olacak şekilde boyanmak istenirse bu şekil kaç farklı şekilde boyanır? 60



10. 6
60 + 60
60 + 60
60 + 60

Şekil 6. Esra'nın 1. aşama 6. ve 7. sorularına verdiği cevaplar

1. aşamanın 9.sorusunda Esra, nerede permütasyon nerede kombinasyon kullanması gerektiğinin farkındadır (Şekil 7). 9. soruyu ön bilgilerini (permütasyon ve kombinasyon) *kullanarak* hızlıca çözmüştür.

9) Bir restorana akşam yemeği yemek için gittiniz. Gittiğiniz restoranın akşam yemeği menüsünde 4 çeşit çorba, 3 çeşit salata, 2 çeşit pilav ve 5 çeşit tatlı bulunmaktadır. Buna göre,

- Bir tatlı 5
- Bir çorba ve bir salata 2
- Bir çorba, bir salata ve bir pilav 2
- İki farklı çorba 6
- Üç farklı çorba'yı kaç farklı şekilde seçebilirsiniz? 2

Şekil 7. Esra'nın 1. aşama 9. sorusuna verdiği cevaplar

İkinci aşamada öğrenci üç problem durumunda zorluk çekmiş veya tereddüt etmiştir. İlk ikisi yukarıda bahsedilen permütasyon, kombinasyon ve alt küme kavramlarına dair ilişkilere ait doğru yanlış soruları (Şekil 2 ve 3) ve özdeş nesnelere seçim sorusudur (Şekil 4). Doğru yanlış soruları (önergeler), o ana kadar öğrencinin karşılaşmadığı soruları ve düşünmediği durumları barındırdığı için zihinsel bir karmaşıklığa sebep olmuştur. Soruda verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulmak için, permütasyon, kombinasyon ve alt küme kavramlarını ilişkilendirme bir kümenin permütasyon, kombinasyon veya alt küme sayısını hesaplayarak bu ifadelerin formüllerini kullanmıştır. Özdeş elma ve portakal sorusunda ise öğrenci problemi zihninde bulunan *önceden karşılaştığı (tecrübe ettiği) problem durumları ile ilişkilendirmeye çalışmıştır*. Ancak yanlış problem durumuyla ilişkilendirmesinden dolayı problemi yanlış şekilde ele almıştır. Kullandığı yolun yanlış olduğunu fark ettiğinde problem durumunun sonuç kümesine odaklanarak doğru çözüme ulaşmıştır.

10) 1 den 100 e kadar sayılar var. Bu sayılardan en az kaç tane seçilmelidir ki en az ikisi ardışık gelsin.

Şekil 8. Esra'nın 1. aşama 10. sorusu

Esra'nın 2. aşamada üçüncü zorluk yaşadığı veya tereddüt ettiği problem, 10.soru yani bu aşamanın son sorusudur. Onuncu soruda 1'den 100'e kadar sayılardan en az iki tanesinin (kesinlikle) ardışık olması için bu sayılardan en az kaç tanesinin seçilmesi gerektiği sorulmuştur. Ancak sorunun kökündeki ardışık gelme olayı, öğrencinin soruyu ele alırken etkili olmuştur. Ardışık gelme durumu söz konusu olduğu için öğrenci ilk anda sayıları ardışık olarak alması gerektiğini düşündürmüştür. Öğrenci, sayıların ardışık olma durumunu düşünürken ardışık sayıları göstermek için aşağıdaki gibi bir diyagram çizmiştir (Şekil 9).



Şekil 9. Esra'nın 1. aşama 10. soru için çizdiği diyagram

Esra, diyagram çizdikten sonra 1'den 100'e kadar olan sayılardan 99'unun ardışık olabileceğini söylemiştir. Esra'nın diyagram kullanması problem durumuna dair sonuç kümesini oluşturarak çözüme dair bir yaklaşım oluşturmaya çalıştığının bir göstergesi olarak görülebilir. Bunun yanında bulduğu cevaptan soruyu tam olarak *anlamadığı* da anlaşılmaktadır. Zira bulduğu sonuç,

onun *beklentisini* de karşılamadı ki sorunun cevabını sorgulaması gerektiğini hissederek soru köküne tekrar odaklanmasına ve farklı bir çözüm yolu için arayışa girmesine sebep olmuştur. Daha sonra ilk söylediği fikirden uzaklaşarak sorunun çözümünde kombinasyon bilgisini işe koymaya çalışmıştır. Çünkü, zihninde seçim ile ilişkilendirdiği *zihinsel eylem* olan kombinasyon bilgisini *kullanmadır*. Ancak araştırmacının öğrenciyi sonuç kümesine yönlendirmesi ile öğrenci tereddüt etmeden doğru çözüm yaklaşımını oluşturmuştur. Bu aşamada öğrenci soruya ön yargılı yaklaştığı yani sorunun zor olduğunu düşündüğü için zihinsel olarak bir karmaşıklık yaşamıştır. Bu karmaşıklığa dair 10.sorunun çözümünde araştırmacı ile Esra arasında geçen diyalog aşağıda sunulmuştur:

Esra : “ Şimdi kaç tane ardışık sayı varsa onu bulabilirsem.1’den 100’e kadar 1, 2 ardışık mesela. 1, 2 ardışık. 2, 3 ardışık, 3, 4 ardışık... 8, 9 ardışık... Bir eksiği olacak muhtemelen. Bir daha bakayım (*yansıma*)... Beş sayıda dördünü ardışık şekilde alabiliyorum. O zaman 100 sayıdan 99 unu mu ardışık alabilirim? 99 ardışık var...(Soruyu tekrar okuyor). En az kaç tanesi seçilmelidir? Burada seçilmelidir diyor kombinasyonla mı gideceğiz? Ama seçilmelidir?”

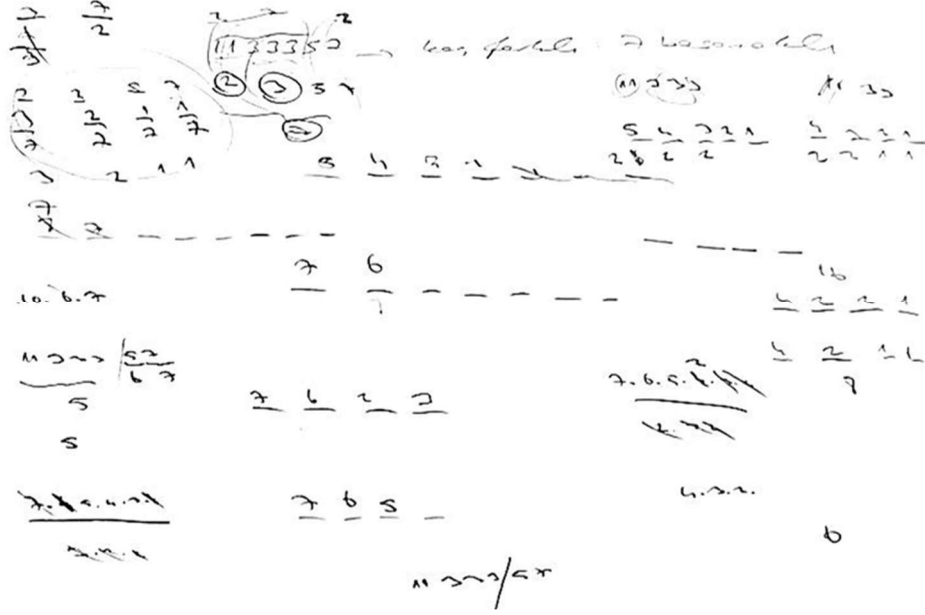
Araştırmacı : “Seçilmelidir derken sayı seçiyorsun ya... Seçme ile mesela sen bana beş sayı seç diyeceksin. Gerçekten ben de rastgele beş sayı seçtiğimde bu durum gerçekleşiyor diyeceğim.”

Esra : “O zaman şöyle... 100 sayının 50 sini aldım.1, 3, 5, 7, ... , 99’a gitti. 50’sini aldım bir tanesini de alırsam ardışık olur, elli bir... Birden ona kadar kaç ardışık var diye bakmak istedim...50 tane sayının arasında boşluk bırakarak alırsam... Sonra artı bir oradan gelir.”

Öğrenci 10.sorunun bir çözümünü bulmuşken yaptığı çözümün doğruluğundan emin olamamıştır. Bu süreçte öğrenci bu soruyu *sahiplenmiş* ve soruya bulduğu çözüm yolunu sorgulamıştır. Çözüm yolu içine sinmeyince soruyu tekrar ele alarak çözümünün yeterli ve doğru olduğuna kanaat getirene kadar uğraşmayı bırakmamıştır. Bu davranış, öğrenmenin olabilmesi için öğrencinin problemi kendi sorunu olarak görmesi, problemi sahiplenmesi ve *içselleştirmesi* gerektiğini göstermektedir.

2. Aşama

2. aşamanın ilk sorusunda, 1133357 sayısının rakamları ile yedi basamaklı kaç farklı sayı yazılabileceği sorulmuştur. Esra, soruyu rutin bir soru olarak görmüştür. Soruyu çok rahat ve hızlı bir şekilde kalem *kullanmadan* tekrarlı permütasyon bilgisini *kullanarak* (*içselleştirilmiş eylemi*) çözmüştür. Bunun üzerine araştırmacı ikinci soru olarak Esra’ya “tekrarlı permütasyon formülünü bilmeseydin ilk soruyu nasıl çözerdin?” sorusunu yönlendirmiştir. Karşılaştığı yeni problemi açıklamaya çalışırken, kendisinin hiç beklemediği, yeni ve farklı bir problem durumuyla karşı karşıya kaldığını fark etmiştir. 2. soruyu okuduğunda birinci sorunun çözümünde *kullandığı ifadeye tekrar bakma ve kullanma ihtiyacı* duymuştur. Karşılaştığı problem durumu öğrenciyi tedirgin etse de problemin çözümü için ilk soruda kullandığı formüle odaklanmıştır. Formülden hareketle, formüldeki sayılardan yardım (ilham) alarak problemin çözümünün veya çözüm yönteminin doğasını anlamaya çalışmıştır (Şekil 10). Yazdığı sayısal değerler ile o değerlere anlam katan soruyla ilgilenmeye başlamıştır. Esra’nın karşılaştığı problemin doğasını araştıran düşünceleriyle birlikte potansiyel bir zorluğu artık aniden görebilmesi, onun önceki görevleri çözerken sergileyemediği bir düzeyde *yansıtıcı* aktiviteye ulaştığını gösteriyor. Daha doğrusu, onun eylemlerinden, artık potansiyel çözüm faaliyetini zihinsel olarak gözden geçirebildiği ve eylemlerini gerçekleştirme durumunda ortaya çıkabilecek zorlukları görebildiği sonucu çıkarılabilir. Esra’nın potansiyel çözüm etkinliğine *yansımasının* bir *zihinsel temsil* (yeniden sunum, hayal etme veya düşüncede çağırma) eylemi olduğu söylenebilir.



Şekil 10. Esra'nın ara vermeden önce 2. aşama 1 ve 2. sorusuna yaptığı çözüm

Esra, tekrarlı permütasyon ifadesine ulaşmaya çalışırken zihinsel olarak yorulmuştur. Bunun üzerine araştırmacı ihtiyacı varsa mola verebileceklerini hatırlatmıştır. Öğrencinin isteği üzerine beş dakikalık bir ara verilmiştir. Aradan sonra öğrenci problemi daha basit bir örnek (eleman sayısı daha az olan bir küme) üzerinden giderek daha kolay çözebileceğini ancak aradan önce nasıl olduydu ilk örnekte dolayı bu örneğe takılı kaldığını ve örneğin karmaşık olduğunu düşündüğü için bunun aklına gelmediğini belirtmiştir. Aslında problemde sorulan sayının basamak sayısının fazla olması ve araştırmacının “örnek dışında başka nasıl bir yol izleyebilirsin?” sorusunun onu yanılttığını, kafasını karıştırdığını söylemiştir. Daha sonra basit bir örnek (basamak sayısı daha az olan bir sayıyı örnek) yazarak, yazdığı örneği önceki bilgilerini *kullanarak* (tekrarlı permütasyon bilgisini *kullanarak*) çözmüştür. Ardından bu çözümünden yararlanarak varsayımlarda veya tahminlerde bulunmuştur. Çözdüğü sorunun çözüm yoluna benzer bir yaklaşım *kullanmanın* (yani daha basit bir problem durumu, sayısal olarak daha küçük bir durum üzerinden uygun çözüm geliştirebilmek için) bir ihtiyaç olduğunu görmüştür. Daha sonra varsayımlarını test etmeye çalışmıştır. Bu süreçte zorlanmış ve varsayımları üzerinde çok zaman harcamıştır. *Zihinsel eylemleri* istenen sonucu vermemiştir. Mevcut bilgileri ile yeni durumu ilişkilendirememiş ve mevcut bilgilerini yeni duruma adapte edememiştir. Yani problemi *özümseyememiştir*. Dolayısıyla zihinsel bir dengesizlik oluşmuştur. Ancak pes etmeden soru ile uğraşmaya devam etmiştir. Esra sorunun ön bilgileri ile çözülebileceği düşüncesini ve kendine olan güven duygusunu korumuştur. İstedikleri hedefe ulaşamayınca tekrar başa dönerek potansiyel çözüm etkinliği üzerine düşünmüştür. Çözüm etkinliğine dair ilişkileri (değişkenlere bağlı olarak) tespit etmeye çalışmıştır. Ortaya koyduğu düşünceleri, yeni varsayımlara yol açan nitelikler şeklinde devam etmiştir. *Zihinsel temsil eylemlerini* yeni probleme göre düzenlemek (*uyarlamak*) için uğraşmıştır. Üzerinde çalıştığı örneği farklı şekillerde ele alarak, kimi zaman *uyarlayarak* yoluna devam etmiştir. Üzerinde çalıştığı kümenin eleman sayısını azaltarak veya elemanlarını değiştirerek bazı kısıtlamalar getirmeye çalışmıştır. Bu kısıtlamalarla hipotez kurmaya çalışmıştır. Hipotezleri belirsizlik içerse de, açıklayıcı bir araç olarak hipotezin inandırıcılığını ve doğruluğunu araştırıp test ederken, sonraki çözüm faaliyetini organize etmesine ve yapılandırmasına yardımcı olmuştur. Bu süreçte öğrencinin karşılaştığı problem durumu, potansiyel çözüm faaliyeti üzerine düşünebildiği, uygun ilişkileri belirleyebildiği ve karşılaştığı durum için bu ilişkilerin etkinliğini değerlendirebildiği açıkça görünmektedir. Esra'nın *zihinsel*

eylemleri, önceki ve mevcut yapılarını işe koşarak yeni problem durumunu kategorize etmeye odaklıdır (Şekil 11). Buradan elde edilen bilgilerle, problem durumunu tahmin etme ve hipotez geliştirme yeteneğinin, Esra'nın asıl hedefine geriye dönük olarak incelemesini mümkün kılan *zihinsel bir temsili* ifade ettiği sonucuna varılabilir. Çünkü, Glasersfeld'e göre zihinsel temsiller, zihinsel olarak çağrılabilen kavramlar veya eyleme dayalı rutinler olarak işlev gören, önceki deneyimlerin yeniden inşasını sağlayan ve yönlendiren içsel yapılardır.

The image shows handwritten mathematical work. At the top, there is a sequence of numbers: 1 2 3 4. Below it, there is a sequence of fractions: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}$. To the right of these fractions, there is a note: "Bunun olas. bir ihtimal". Below this, there is a calculation: $\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3} = \frac{1}{150}$ ise 150 olasılık var.

Şekil 11. Esra'nın aradan sonra 2. aşama 2. sorusuna olasılık kullanarak yaptığı çözüm

Esra, zihinsel yorgunluğunu üstünden attığında aşağıdaki konuşmadan anlaşıldığı gibi zihninde tekrarlı permütasyon ifadesine kolayca ulaşabileceğine dair bir fikir oluşmuştur. Bu düşünceyle kombinasyon ifadesi ile çarpma ilkesini kullanarak tekrarlı permütasyon ifadesini soyutlamıştır (Şekil 12). Esra'nın tekrarlı permütasyon ifadesini soyutlarken yaptığı yorumlarından ve çözümlerinden kesitler aşağıdaki gibidir:

Esra : "Bir kere hocam siz o sayıyı verirken çok karmaşık vermişsiniz. Onu fark ettim. Normalde ben sayılarla işlemler yapardım ama hani siz sen sayı deniyorsun deyince sayı denemeyi bıraktım normalde o soruyu asla biraz önce çözdüğüm gibi çözmezdim. Kendimi gereksiz zorlamışım onu fark ettim biraz daha sayıları falan küçültsem daha kolay yapardım... İkinci yol da olasılıktan geliyor. Yani 7 basamaklı o sayılarla rastgele bir sayı yazdım onun gelme olasılığı 1 bölü x olacaktı atıyorum. x de ihtimal sayısı... Şey gibi... Bir zarda 4 gelme olasılığı 1 bölü 6 ise 6 ihtimal vardır gibi..."

Araştırmacı : "Peki örnek üzerinden değil de n tane sayı r tanesi aynı, p tanesi aynı deseydim..."

Esra : "O genellemeyi ilk örnekten yaparım. Buradan biraz zor ama bakayım. 2 sayı aynıymış değil mi... 1'den r tane, 2'den p tane diye düşündüm mesela. Ama sıkıntı olabilir bunda...(yansıma)"

Esra : "Bu doğru gibi... Ama bunda da ikinci kısım doğru ilk kısım hatalı olabilir (yansıma). Şimdi ikinci kısımda eğer $n = r + p$ ise direk n'in r'lisi oluyor. Ama ilk kısımda hata olabilir bakayım. Yani tekrar edenlerden başka sayı yoksa. 11122 gibi."

Esra : "İlk önce 8 tane eleman var mesela onun birlisini alıyoruz ondan sonra $r + p + 1$ e kadar n' i azaltarak almaya devam ediyoruz ondan sonra da $r + p$ 'nin r'lisini alıp çarpıyoruz. Bir sayı yazdığımız düşünün 8 sayı var ilk basamağa 8 sayı gelebilir. Sonra 7 basamak kalıyor, 7 tane gelebilir. Taki $r + p$ basamak kalana kadar... $r + p$

basamak kaldığında da sadece aynı olanlar kalmış oluyor. Onun için de $r+p$ 'nin r 'lisi. Seçme olarak düşünmemem lazım. Sayılardan gidince daha akla yatıyor..."

$$n \rightarrow C_{r+p} \binom{n}{1} \cdot \binom{n-(r+p)}{1} \cdot \binom{r+p}{r}$$

$$n = (r+p) \binom{n}{r}$$

Şekil 12. Esra'nın tekrarlı permütasyon ifadesini soyutlaması

Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada permütasyon ve kombinasyon konusunu görmüş 11. sınıf bir öğrencinin permütasyon ve kombinasyon kavramlarını zihninde nasıl anlamlandırıldığını ve geliştirdiğini ortaya koymak amaçlanmıştır. Bunun için Glasersfeld'in, zihinsel temsil ile ilgili görüşleri temel alınarak bir öğrencinin göreve dayalı etkinliğinin problem çözme bağlamında nasıl geliştiğini ve zihinsel temsillerini daha soyut bilişsel yapılara dönüştürdüğünü göstermeye odaklanılmıştır.

Birinci aşamada Esra, rutin (permütasyon ve kombinasyon ile ilgili) problemler ile rutin olmayan yani şu ana kadar karşılaşmadığı ve yorum gerektiren problemlerle karşı karşıya kalmıştır. Birinci aşamada elde edilen bulgulardan Esra'nın permütasyon ve kombinasyon kavramlarını anladığı anlaşılmaktadır. Ancak bu aşamanın başlangıcında öğrenciden permütasyon, kombinasyon kavramları açıklaması istendiğinde bu kavramların tanımını yapamayacağını söylemiştir. Tanım yapmak yerine kavramları tek kelimeyle ifade edip (örn. kombinasyon seçme), kavramları anlatabilmek için birer örnek vermiştir. Esra, verdiği örnek üzerinden permütasyon ve kombinasyon kavramlarını ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi açıklamıştır. Matematiksel kavramların tanımları önemlidir. Ancak Esra'nın bu aşamada tanım yapamaması ancak doğru çözümü ve yorumu yapması, bir kavramın doğru ve tam bir tanımını yapmanın veya yapamamanın o kavramın anlaşıldığının tam bir göstergesi olmadığını ortaya koymuştur. Araştırmadan elde edilen bu bulgu, Batereno'nun (1995) bir kavramı anlamının (örn. permütasyon), basitçe onun tanımını yeniden üretebilmeye indirgenemeyeceği fikri ile örtüşmektedir.

Çalışmada kavramlar, bir problem durumu ile karşılaşıldığında ve problemin çözümünde yetersiz kalınıp problem sahiplenildiğinde ortaya çıkmıştır (örn., 2.aşama 2.soru tekrarlı permütasyon). Öğrencinin baş edemediği problem durumlarına yönlendirilmesinin (veya zorlanacakları problemlerle karşı karşıya bırakılmasının) öğrencinin problemleri sahiplenerek amaca yönelik anlamlı faaliyetlerde bulunmalarını (veya yeni kavramsal yapıları soyutlamalarını) desteklediği sonucuna ulaşılmıştır. Zira bu tür deneyimsel durumların öğrencinin zihinsel çağrışımlarda bulunmasını, zihinsel temsillerinde varsa kavramsal tutarsızlıkları fark etmesini (ya da en azından fark etmesi için bir fırsat oluşturmasını) ve kavramsal gelişimi (veya yeni kavramların soyutlanmasını) desteklediği görülmüştür. Bu bulgular, Batereno (1995) ve Glasersfeld'in (1995) kavramların problem durumlarını çözmek için yürütülen uygulamalar sisteminden ortaya çıktığı düşüncesi ile örtüşmekte olup, Cifarelli ve Sevim (2014) ve Glasersfeld'in (1995) çalışmalarında elde edilen öğrencileri düşünmeye sevk eden, öğrencilerin sahiplenebileceği ve öğrencilerin zihinsel temsillerini harekete geçiren problem durumlarının öğrencilerin yeni kavramsal yapılarını soyutlanmasına veya kavramsal ilerlemesine fayda sağladığı sonuçlarıyla tutarlıdır.

Esra etkinlikte özellikle ilk kez karşılaştığı problemlerin çözümünde, problemin çözümüne dair zihninde varsayımlar (veya tahminler) oluşturmuş ve oluşturduğu bu varsayımların doğruluğu için çözümün bazı bileşenlerini değiştirerek zihnindeki çözüm yolunu doğrulamaya çalışmıştır.

Etkinliğin genelinde çözümün bazı bileşenlerini değiştirerek doğrulama (örn., tekrarlı permütasyon sorusu), çözüme gerekçeler ekleyerek doğrulama (örn., doğru yanlış sorusu), farklı bir çözüm yöntemi kullanarak doğrulama (örn., tekrarlı permütasyon sorusu) ve cevabın makullüğünü değerlendirerek doğrulama (örn., özdeş elma portakal sorusu) stratejilerini kullanmıştır. Problemlerin çözümünde, doğrulama stratejisi kullanılıp kullanılmayacağına ve doğrulama stratejisi kullanılacaksa hangi doğrulama stratejisini kullanması gerektiğine karar verirken öğrencinin zihnindeki sayma problemlerine dair sahip olduğu zihinsel şemasının etkili olduğu görülmüştür. Öğrencinin problem durumları karşısında kullandığı doğrulama stratejilerinden ve kullandığı stratejilerle doğru çözüme ulaşma açısından elde ettiği başarıdan sayma problemlerinin çözümlerinde yararlı olan stratejinin veya stratejilerin formülleri hatırlamaya yönelik olanların değil, sezgiye dayalı olanların olduğu tespit edilmiştir. Elde edilen bu bulgu, Eizenberg ve Zaslavsky'in (2004) sayma problemlerinin çözümünde kullanılan doğrulama stratejilerinden faydalı olanının sezgisel ve deneysel yaklaşım olma bulgusu ve Fischbein ve Grossman'ın (1997) sezgilerin, anlık tahminler olarak ifade edilse bile, aslında sahne arkasında manipüle edildiği bulgusu ile paraleldir.

İkinci aşamada öğrenci tekrarlı permütasyon ifadesini bulmak için çarpma ilkesini, permütasyon, kombinasyon ve olasılık ile ilgili bilgilerini kullanmıştır. Bu aşamada Esra varsayımlarda bulunmuş, çözüm için farklı yollar denemiştir. Denediği çözüm yolları kimi zaman kafasını karıştırmıştır. Katılımcı kafası karıştığında problem durumuna ait sonuç kümesinden yararlanarak yeni bir çözüm yolu bulmaya ya da çözüm yolunun doğruluğunu kendine göstermeye çalışmıştır. Yaptığı çözümün veya ön gördüğü çözüm yolunun doğruluğunu göstermek için permütasyon ve kombinasyon formüllerini kullanmıştır. Kimi zaman da varsayımlarının doğru olup olmadığını eleman sayısı az olan kümeler olarak kontrol etmiştir. Esra bu çözüm yollarını denerken problemin çözüm sürecinin uzun sürebileceğini ancak bu sürecin sonunda problemin çözüleceğini söylemiştir. İlginç bir şekilde, Esra problem çözümlerinde formülleri kullanmakta ısrarlı olsa da problemleri genellikle sahip olduğu deneyim ve zihinsel şeması aracılığıyla sezgisel çözmüştür. Problem çözüme sürecinde rutin olmayan problemlerde Esra'nın genel olarak sezgisel tahminlerinin, öğrencinin sahip olduğu kombinatoriyal şema ile ilgili bazı örtülü hesaplamaları ifade ettiği görülmüştür. Elde edilen bu bulgu, Fischbein ve Grossman'ın (1997) şemaların sezgiler üzerinde etkili olduğunu belirttiği araştırma sonucunu destekler niteliktedir.

Çalışmada genel olarak elde edilen bulgular, öğrencinin toplama ve çarpma ilkesini, permütasyon ve kombinasyon kavramlarına hakim olduğu ve temel sayma formüllerini doğru ve etkin bir şekilde kullandığını; tekrarlı permütasyona ait sayma formülünü başarılı bir şekilde yeniden inşa ettiğini veya soyutladığını göstermiştir. Etkinliğin genelinde öğrencinin doğru ve başarılı bir sayma işlemini etkin bir şekilde sergilenmesinde öğrencinin zihninde çarpma ilkesinin mantığına veya kavramsal gerekçelerini bilmesinin ve sürekli olarak yaptığı eylemleri sorgulamasının ve sağlam bir motivasyona sahip olmasının yol açtığı görülmüştür. Bu da permütasyon ve kombinasyon konusunun öğretiminden önce öğrencilere çarpma ilkesinin mantığının kavratılmasının gerekliliğini ve yeni kavramların soyutlanmasında veya zihne yerleştirilmesinde yansımanın (birbirini izleyen derin düşünceler) bu sürecin en önemli bileşenlerinden biri olduğunun göstergelerinden biri olduğunu ortaya koymuştur. Öğrencilerin kavramlar üzerine düşünmesinin, kavramları anlamak için çaba sarf etmesinin ya da kavramların kavramsal gerekçelerini bilmesinin yeni kavramları soyutlaması veya yeni durumları anlamlandırması adına önemli, temel veya can alıcı bir nokta olduğu gerçeğini açıkça ortaya koymaktadır. Bu anlamda Lockwood vd.'nin (2015) araştırmasında elde ettiği kombinatoriğin öğretimi sırasında öğrencilerin çarpma ilkesini ne ölçüde kullandığını ve anladığını daha geniş bir şekilde değerlendirilmesinin gerekliliği; Glasersfeld'in (1987) ve Cifarelli ve Sevim'in (2014) matematiksel yapıların soyutlama sürecinin gerçekleşmesinde yansımanın bu sürecin vazgeçilmez bir bileşeni olduğu fikri ile örtüşmektedir.

Çalışmada, Esra'nın etkinlik boyunca hangi problemle (rutin veya rutin olmayan) karşılaşırsa karşılaşsın, problemleri sahiplenmesinin, problemleri çözebilecek bilgi birikimine sahip olduğunu ve çabalarsa her zorluğun üstesinden gelebileceğini düşünmesinin problem çözme eylemlerine olumlu olarak yansıdığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde gerekçelendirme safhasında ve bunun yanında etkinliğin devamında bilişsel duygular (örn., bilme, doğruluk) kadar öğrencinin süreçteki duygusal duygularının (örn., mutluluk, kaygı) da etkili olduğu, bu duyguların birbirini etkilediğini ve birbirlerini yönlendirdiği sonucuna ulaşılmıştır. Araştırmadan elde edilen bu sonuç, Clore'un (1992) duygusal ve bilişsel duyguların, çeşitli yargı ve kararların merkezinde yer aldığı fikrini destekler niteliktedir.

Öneriler

Matematik, soyut kavramlar, bu kavramların organizasyonunu ve sonuçlara ulaşmak için bir dizi yöntemi içinde barındıran bir sistemdir (Thanheiser, 2023). Bu sistemin işleyebilmesi için kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişki ağının zihne yerleştirilmesinin doğru olması yani soyutlamanın bilinçli bir şekilde yapılması gerekmektedir. Bunun gerçekleşmesinde zihinsel temsillerin ve yansımaların (yansıtılmaların) önemli rollerinin olduğu ve zihinsel temsil eylemlerinin ve yansıtmanın (yansımının) soyutlama sürecinin gelişimini desteklediği ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla öğretmenlerin öğrencilerin zihinsel temsillerini ve yansımaya eylemini kullanmalarını sağlayacak etkinlikler planlaması ve bu etkinliklerde zihinsel temsillerini ve yansımaya eylemini kullanmalarına teşvik edecek şekilde öğrencileri desteklemesi, bu süreçlerin düzgün bir şekilde gerçekleşmesinde faydalı olacaktır. Bununla birlikte bu süreçte öğrencilerin zihinsel temsillerini onların zihinlerinde geçerli olan ve onların deneyimleri sonucu oluşturdukları yapılar olarak görmeleri öğretmenlerin karşılaştıkları durumları doğru anlamlandırmalarına ve durumlara doğru ve uygun müdahale etmelerine yardımcı olabileceği düşünülmektedir.

Ayrıca çalışmada çözümlerinde yetersiz kalan, hedefleri önünde engel olarak var olan ve kavramsal tutarsızlıkları ortaya çıkaracak şekilde oluşturulan problemler (veya etkinlikler), soyutlama sürecinin gerçekleşmesinde olumlu etkilere sahip olduğu sonucuna bakıldığında, derslerde veya ders dışı etkinliklerde iyi problem çözme durumlarının veya etkinliklerinin kullanımı öğrencilerin zihinsel temsil ve yansımaya eylemlerini kullanarak öğrencilerin sahip oldukları kavramlarını değiştirmelerine veya yeni yapıları soyutlamalarına teşvik edecektir. Bu araştırmanın resmi bir fen lisesinde ve bir öğrenci üzerinde yapılmış olması, elde edilen bulguları sınırlamıştır. Daha sonra yapılacak çalışmalar, farklı okul türlerinde ve daha geniş katılımlı bir grup üzerinde yapılabilir.

Teşekkür

Araştırmanın gerçekleştirilmesinde araştırmaya gönüllü olarak katılan öğrencimize teşekkür ederiz.

Kaynakça

- Akbulut, Y. (2012). Veri çözümleme teknikleri. A. Şimşek (Ed.), *Sosyal Bilimlerde araştırma yöntemleri* içinde (s. 162-195). T.C. Anadolu Üniversitesi Yayını No: 2750, Açıköğretim Fakültesi Yayını No: 1708 (132-164), Eskişehir.
- Akbulut, Y. (2013). Verilerin analizi. A. A. Kurt (Ed.), *Bilimsel araştırma yöntemleri* içinde (s. 132-164). T.C. Anadolu Üniversitesi Yayını No: 2750, Açıköğretim Fakültesi Yayını No: 1708, Eskişehir.
- Aydın, S. ve Beyazıt, İ.(2021). Nitel araştırmalarda geçerlilik ve güvenilirlik. M. Çelebi (Ed.), *Nitel araştırma yöntemleri* (1. Baskı) içinde (s.182-209). Ankara: Pegem Akademi

- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32(2), 181-199. <https://doi.org/10.1023/A:1002954428327>.
- Cifarelli, V. V., & Sevim, V. (2014). Examining the role of re-presentation in mathematical problem solving: An application of Ernst von Glasersfeld's conceptual analysis. *Constructivist Foundations*, 9(3), 360-369.
- Clore, G. L. (1992). Cognitive phenomenology: Feelings and the construction of judgment. In L. L. Martin & A. Tesser (Eds.), *The construction of social judgments* (pp. 133-163). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- Çepni, S. (2021). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş*. (9. Baskı). Trabzon: Celepler basım yayın ve dağıtım.
- Eizenberg, M., & Zaslavsky, O. (2004). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(1), 15-36. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0601_2
- English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). Boston, MA: Springer US. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_6
- Fischbein, E., & Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *ZDM* 5, 193-198.
- Glasersfeld, E. von (1987). Learning as a constructive activity. *Problems Of Representation In The Teaching and Learning of Mathematics*, 3(17), 83-90. <https://vonglasersfeld.com/papers/083.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Glasersfeld, E. von (1995). *Radical constructivism: a way of knowing and learning*. London and Washington, DC: The Falmer Press.
- Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 111-127. <http://www.jstor.org/stable/3481871>
- Kavousian, S. (2008). *Enquiries into undergraduate students' understanding of combinatorial structures* (Unpublished doctoral dissertation). Vancouver, BC: Simon Fraser University.
- Lamanna, L., Gea, M. M., & Batanero, C. (2022). Do Secondary School Students' Strategies in Solving Permutation and Combination Problems Change with Instruction?. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 602-616. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00228-z>
- Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 251-265. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.008>
- Lockwood, E., & Gibson, B. R. (2016). Combinatorial tasks and outcome listing: Examining productive listing among undergraduate students. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 247-270.
- Lockwood, E., A Swinyard, C., & S Caughman, J. (2015). Patterns, sets of outcomes, and combinatorial justification: Two students' reinvention of counting formulas. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1, 27-62. <https://doi.org/10.1007/s40753-015-0001-2>

- Lockwood, E., Wasserman, N. H., & McGuffey, W. (2018). Classifying combinations: Investigating undergraduate students' responses to different categories of combination problems. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4, 305-322. <https://doi.org/10.1007/s40753-018-0073-x>
- Maher, C. A., & Uptegrove, E. B. (2010). Methodology. In Maher, C. A., Powell, A. B., & Uptegrove, E. B. (Eds.), *Combinatorics and reasoning: Representing, justifying and building isomorphisms (Vol. 47)* (pp.9-16). London: Springer Science & Business Media
- Melusova, J., & Vidermanova, K. (2015). Upper-secondary students' strategies for solving combinatorial problems. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 197, 1703-1709. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.07.223>
- Özdemir, M. (2012). *Matematik olimpiyatlarına hazırlık-2*. İzmir: Altın Nokta Yayınları.
- Patton, M. Q. (2013). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (3. Baskı). (M. Bütün ve S. B. Demir, Çev.). Ankara: Pegem Akademi.
- Şahan, H. H. ve Uyangör, N. (2021). Bilimsel araştırmalarda örneklem seçimi. M. Çelebi (Ed.), *Nitel araştırma yöntemleri* (1.Baskı) içinde (s. 112-137). Ankara: Pegem Akademi.
- Thanheiser, E. (2023). What is the mathematics in mathematics education? . *The Journal of Mathematical Behavior*, 70, 101033.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2021). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (12. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Etik

Araştırma Kastamonu Üniversitesi Sosyal ve Beşerî Bilimler Araştırma Etik Kurulunun 29.03.2023 tarihli izni çerçevesinde yürütülmüştür. Çalışma sürecinde araştırma ve yayın etik ilke ve kurallarına uyulmuş olup araştırma gönüllük esasına göre yürütülmüştür. Araştırmanın çalışma grubunu oluşturan öğrenciye verilerin bilimsel bir araştırma için kullanılacağı ve kimliklerini açığa çıkaracak bir soru olmadığı bilgisi verilmiştir.

ETİK ve BİLİMSEL İLKELER SORUMLULUK BEYANI

Bu çalışmanın tüm hazırlanma süreçlerinde etik kurallara ve bilimsel atıf gösterme ilkelerine riayet edildiğini yazar(lar) beyan eder. Aksi bir durumun tespiti halinde OJOMSTE'nin hiçbir sorumluluğu olmayıp, tüm sorumluluk makale yazarlarına aittir.

ARAŞTIRMACILARIN MAKALEYE KATKI ORANI BEYANI

1. yazar katkı oranı : % 60
2. yazar katkı oranı : % 40