Online Journal of Mathematics, Science and Technology Education (OJOMSTE)

Vol: 3 No: 1 Year: 2022

journal homepage: https://www.ojomste.com/index.php/1

Bilgisayar Cebiri Sistemleri (BCS) İle Genel Matematik Öğretimine Yaklaşımlar

Güler Tuluk[a], Ahmet KAÇAR[b]

[a]*Kastamonu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Kastamonu/Türkiye,*
gtuluk@kastamonu.edu.tr, https://orcid.org/0000-0002-3665-6699
[b]*Kastamonu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Kastamonu/Türkiye,*
akacar@kastamonu.edu.tr, https://orcid.org/0000-0002-0072-2033

Anahtar Kelimeler:

Bilgisayar Cebiri Sistemleri,

Genel Matematik

Makale Türü:

Araştırma

Öz

BCS, sınıflarda matematik kavramların edinilmesinde ve pekiştirilmesinde sembolik, geometrik ve istatistiksel yaklaşımları ile birçok farklı kullanım imkânı sunar. Günümüzde matematik öğretenlerin ve öğrenenlerin BCS'nin kullanılmadığı ve buna dayalı matematiksel becerileri edinme ve edindirme yaklaşımları vardır. Bu makale bir BCS yazılımı Maple ile lise ve lisans öğretiminde genel matematik dersinde bazı durumları açımlamak amacıyla sunulmaktadır: 1. Genel Matematik dersindeki cebir ön bilgileri ile çalışmalar, 2. BCS kullanarak öğrencilerin anlamasına yardımcı olma ve değerlendirme. Yazarlar bu çalışmanın Genel Matematikteki ön bilgilerin tamamını olmasa da matematik öğrenen ve öğretenlerin arasında BCS kullanımının tartışılmasını ümit etmektedir.

Tuluk, G., & Kaçar, A. (2021). Bilgisayar Cebiri Sistemleri (BCS) İle Genel Matematik Öğretimine Yaklaşımlar. *Online Journal of Mathematics, Science and Technology Education (OJOMSTE)*, 2(1), 33-58

Online Journal of Mathematics, Science and Technology Education (OJOMSTE)

Vol: 3 No: 1 Year: 2022

journal homepage: https://www.ojomste.com/index.php/1

Approaches to Teaching General Mathematics With Computer Algebra Systems (CAS)

Güler Tuluk[a], Ahmet KAÇAR[b]

[a]Kastamonu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Kastamonu/Türkiye, gtuluk@kastamonu.edu.tr, https://orcid.org/0000-0002-3665-6699
[b]Kastamonu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Kastamonu/Türkiye, akacar@kastamonu.edu.tr, https://orcid.org/0000-0002-0072-2033

Keywords:

CAS (Computer Algebra System's),

Genel Matematik

Paper Type:

Research

Abstract

BCS offers many different uses with its symbolic, geometric and statistical approaches in the acquisition and reinforcement of mathematical concepts in the classroom. Today, mathematics teachers and learners have approaches that do not use BCS and acquire and acquire mathematical skills based on it. This article is presented with a BCS software, Maple, to explain some situations in general mathematics in high school and undergraduate education: 1. Working with algebra pre-knowledge in General Mathematics, 2. Helping students to understand and evaluating using BCS. The authors hope that this study will discuss the use of BCS among mathematics learners and teachers, although not all of the prior knowledge in General Mathematics (Calculus).

Tuluk, G., & Kaçar, A. (2021). Bilgisayar Cebiri Sistemleri (BCS) İle Genel Matematik Öğretimine Yaklaşımlar. *Online Journal of Mathematics, Science and Technology Education (OJOMSTE)*, 2(1), 33-58

Giriş

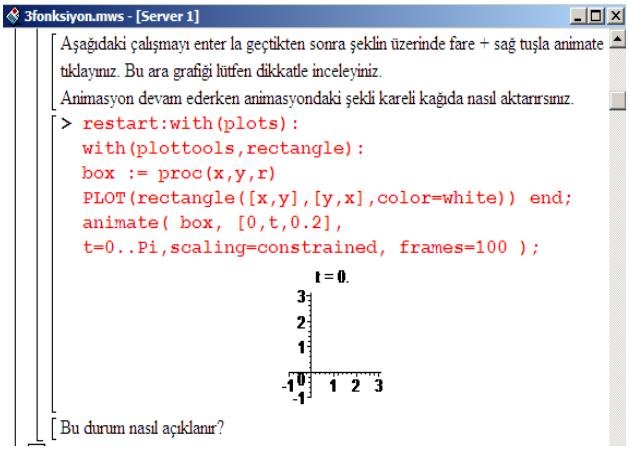
Teknoloji matematiğin öğretilmesi ve öğrenilmesi için önemlidir, matematiği etkiler ve öğrencilerin öğrenmesini geliştirir (NCTM, 2000). Öğrenenin yaşadığı süreci bilmek, matematik etkinliklerini düzenlerken öğrenme programını planlama, düzenleme ve uygulamada öğrenene olduğu kadar öğretenede yol gösterir. Bu tip bir öğrenme zengin bir öğrenme ortamını, gerçek durumlarla karşılaşmayı, sosyal etkileşimi ve tartışmaları yaratabilmemizde BCS yazılımlarından Maple ile bir açılım sunulmaktadır.

BCS ile Temel Beceriler

Matematik analizin pek çok uygulaması, değişen nicelikleri tanımlamak için reel sayıları ve değişkenleri ihtiva eder. Bir geometrik veya bilimsel olayın matematiksel incelemesinin anahtarı, tipik olarak, olayı tanımlayan değişkenler arasındaki bağıntıların elde edilmesidir.

Etkinlik 1:

Örneğin şekil 1'deki worksheet karenin çevresindeki değişimin animasyon ile izlenmesi değişkenin belirlenmesi, değişimin ortaya çıkışı etkinliğidir.

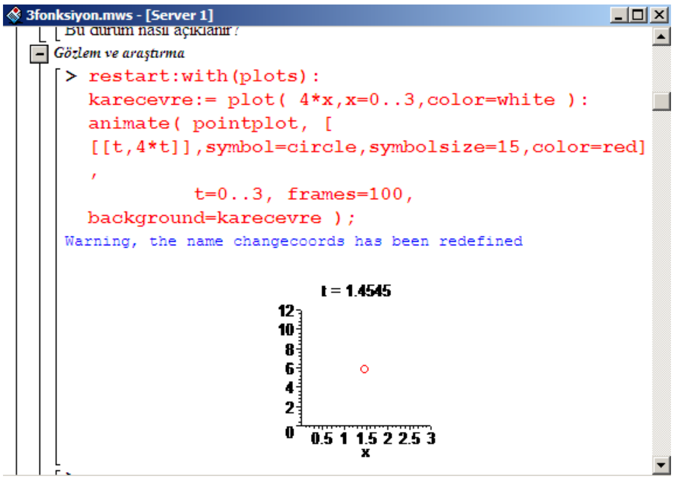


Şekil 1

Karenin çevresinin hesaplanmasında tümden gelimle ilkokulda toplama yoluyla sayma yapılırken çarpımsal düşünmeye bilinmeyen kullanılarak başlanır. Cebirsel bir ifadenin ilk başlangıcı olarak $4a$ söylenir. Değişimin nasıl meydana geldiğinin ilk incelenmesine ve öğrencilerin bir bağlamın içinden fonksiyon kavramının elde edilişine tanık olmalarının sağlanması adımı atılabilir.

Kavramın sadece tanım ile değil nesne ile ile birlikte etkileşerek bir uzlaşıya gidecek şekilde ele alınışı problem çözme yönünde başlangıcı temsil edebilir.

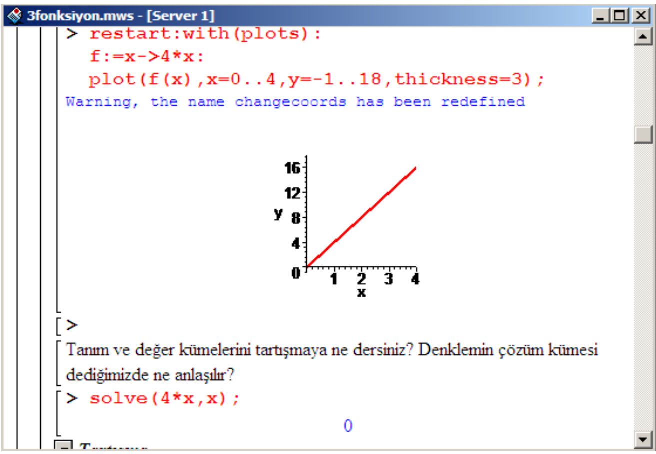
sadece `> for x from 0 to 5 do print(x,4*x) od;` ile geometrik yaklaşıma sayısal inceleme yani tablo ile girdi ve çıktı düşündürülür.



Şekil 2

Şekil 2 bu değişimin matematiksel süreç becerilerinden temsilin önemi ve fonksiyon kavramında değişimi incelemenin başlaması ve fonksiyonun denklemin özel bir hali olduğu sonucuna ulaşma olanağı sunmaktadır.

Denklem belirlenince ardışık noktaların birleştirilmesi ve denklemin grafiğinin çizilmesiyle devam sağlanır. Değer kümesi ve tanım kümesi üzerinde tartışma ve sayılar doğal sayı olursa elde edilebilecek sıralı ikililer, sayılar gerçel sayılar olsun der $f : IR -> IR$ devam eder. Sonuçta, grafikle bir değişimin incelenmesi gerçekleşir. Değişkenin belirlenmesi ve kullanımı matematik öğretimindeki her aşamada değerlidir. BCS, değişken kullanımına farklı bakış açısı ile deneyimlerimizi daha somut hale getirebilir.



Şekil 3

Grafik çizmeye yarayan plot komutu ile öğrenen tanım ve değer kümesini sorgulayarak bir çalışma sürdürebilir. Denklemin bir çözümünün olması ne demektir sorusunun cevabı tartışmayla ortaya çıkar (Şekil 3). Bu arada ötelemeler için sorgulama sürdürebilir. “Karenin kenarını bir birim arttırsaydık bu çevredeki değişim nasıl ifade edilebilir?” $f(x+1)$

Matematik öğrenen ve öğretenlerin süreci yaşayanların süreç üzerinde tartışmaları ve konuşmaları yani kendi öğrenme tarzlarını tanımaları, kullandıkları stratejilerin sonuçlarını izlemeleri daha iyi öğrenmelerini sağlar. Üstbiliş (Metacognition) diyebileceğimiz bu duruma “ne bildiğini” ve “ne bilmediğini” bilmeye BCS katkı verir (Kramarsky & Hirsch, 2003).

BCS ile öğreticiler worksheet’ler hazırlayabilir ve oluşturulacak bir öğrenci çalışma section’ı ile öğrenenin nasıl çalıştığını izleyebilir. Değerlendirmeye yeni bir boyut katılır.

Etkinlik 2:

Şu etkinliği tartışalım.

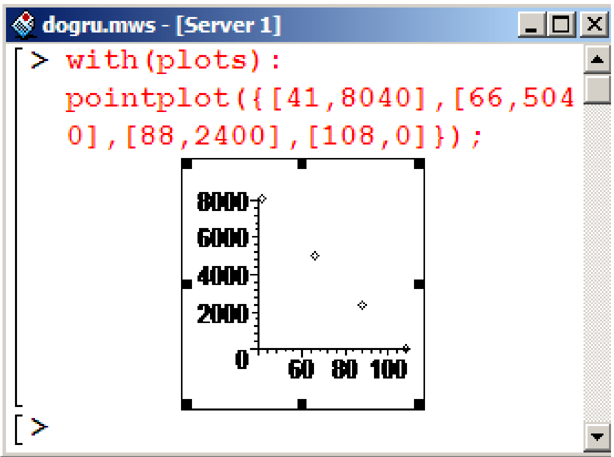
Bir fabrika ütü üretmeyi düşünmektedir.

Fabrikanın piyasa araştırma bölümü yandaki fiyat-talep bilgilerine erişmiştir

Fiyat ve talep arasında nasıl bir bağıntı vardır?

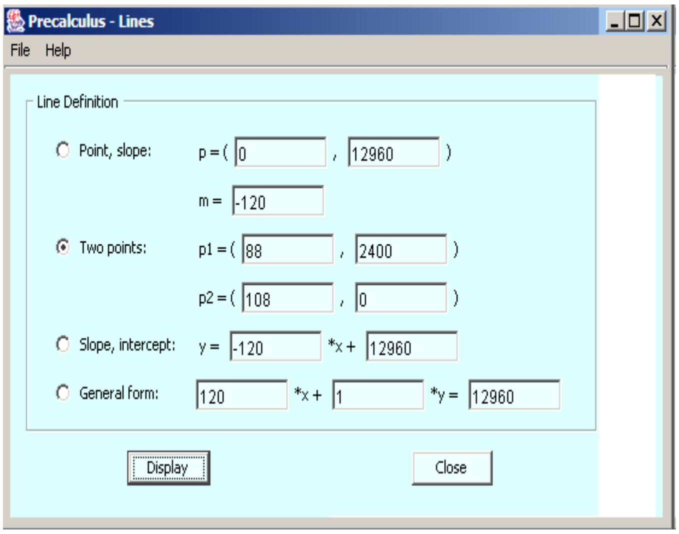
Fiyat (YTL)	Tahmini talep (kişi sayısı)
41	8040
66	5040
88	2400
108	0

BCS



Şekil 4

BCS noktaların nasıl bir eğri olduğunu tespit etmeye yarayan gözlemlere fırsat sunar. Şekil 4‘de çizdirilecek noktalar kümesi ile elde edilecek denklem düşündürülür ve üzerinde tartışılabilir. Bir maplet veya yazılacak komutla Düzgün Doğrusal olan bu bağıntı bir fonksiyon haline getirilmiş olur. Denklemin grafiği çizilerek de incelemeye devam edilebilir.



Şekil 5

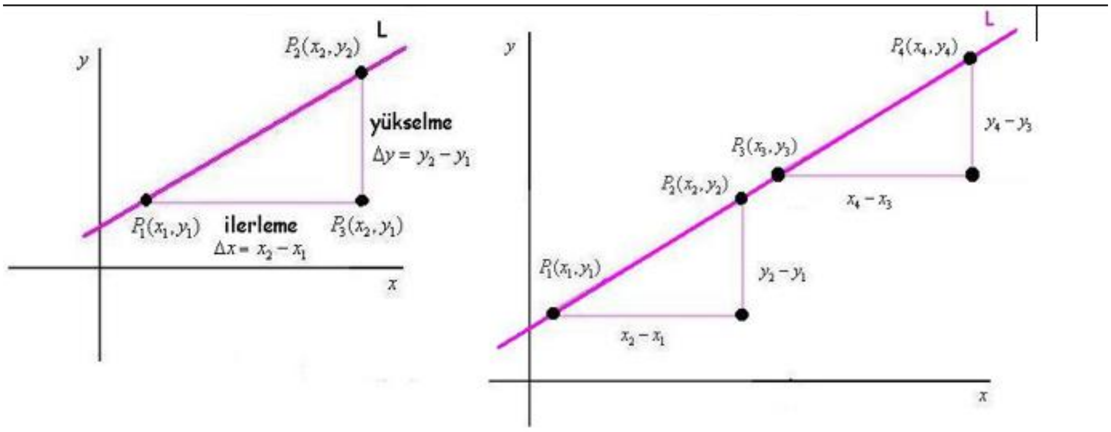
```
> with(student):
f:=makeproc([88,2400],[108,0]);
> ma:=slope([88,2400],[108,0]);
```

$$f := x \to -120\, x + 12960$$

$$ma := -120$$

Konuya hakim olmada cebirsel kavramların kullanımına yönelik deneyimler öğrenenin kendisi için yeni bakışlar geliştirmesine fırsat verebilir. Bu şekilde hem matematiksel beceriler hemde temel komutlar problem çözme etkinlikleri ile sorgulanarak elde edilir. Ders futbol karşılaşması olmadığı için çözüme giden yolları tartışmak en az çözümü bulmak kadar değerlidir.

Bu soruyu iki noktadan geçen doğru denklemini kullanarak çözmüş olsaydık;



Şekil 6

Bir doğrunun eğimini soldan sağa doğru yükseliş (iniş) veya ilerlemelerin oranı olarak düşünelim (Şekil 6).

Koordinat düzleminde dikey olmayan L doğrusu verilsin. L üzerinde iki $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktaları seçilsin. P_1 ‘den P_2 ‘ye Δx ve Δy artımlarını gözönüne alalım.

$\Delta x = x_2 - x_1$ ve $\Delta y = y_2 - y_1$ ile tanımlıdır.

Fen Bilimlerinde Δx ilerleme, Δy yükselme şeklinde adlandırılır.

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ….. (1) dikey olmayan L doğrusunun eğimi olarak tanımlanır.

Şekil ‘de benzer üçgenlerden

$\dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ eşitliği yazılabilir.

Böylece (1) denklemi ile tanımlanmış olan m eğimi, P_1 ve P_2 ‘nin özel seçiminden bağımsızdır.

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x - x_1 \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) + y_1$$

$$y = \left(\frac{0 - 2400}{108 - 88}\right) x - 88\left(\frac{0 - 2400}{108 - 88}\right) + 2400$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{-240\cancel{0}}{2\cancel{0}}\right) x - 88\left(\frac{-240\cancel{0}}{2\cancel{0}}\right) + 2400$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{-240}{2}\right) x - 88\left(\frac{-240}{2}\right) + 2400$$

$$\Rightarrow \quad y = -120x + 12960$$ elde edilir.

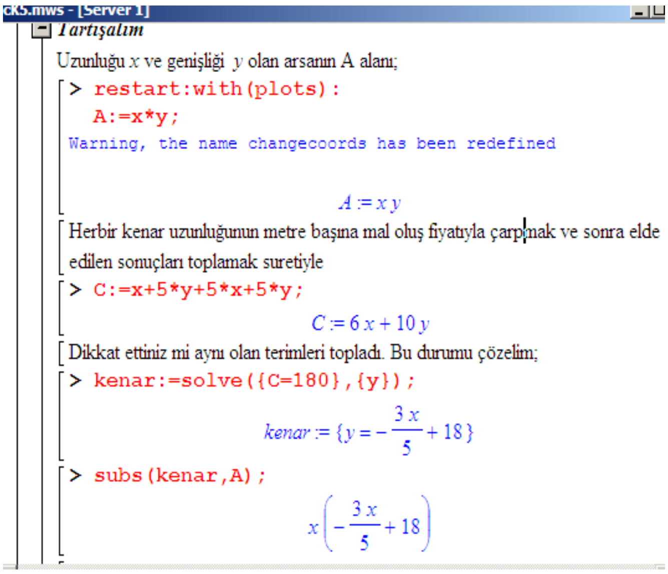
Matematiğin tarihsel sürecinde kavramlar, problemler ortaya atılarak çıkmıştır. İyi seçilmiş problemler öğrenenlerin kavramı tartışarak elde etmelerine fırsatlar sunar. BCS bu süreçte işlem becerisi ve kavrama odaklanmada prolem çözme etkinlikleriyle farklı bir bakış sunar (Tuluk ve Kaçar, 2007).

Etkinlik 3:

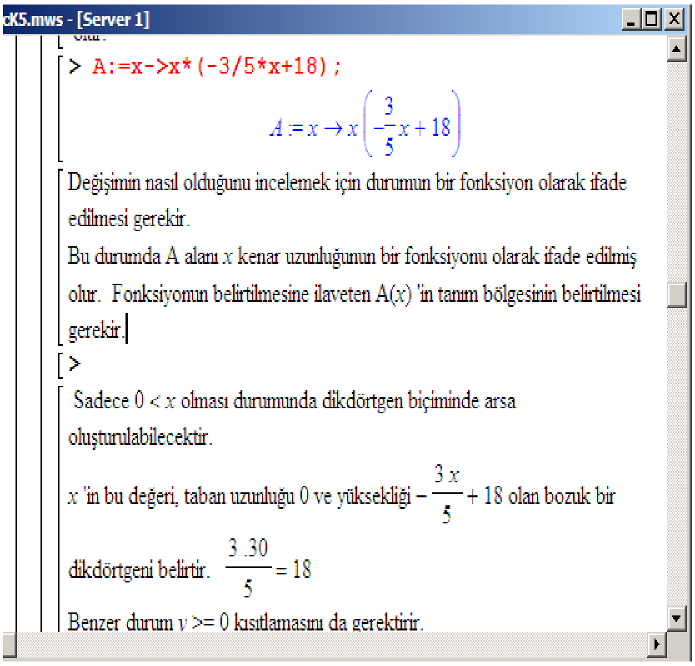
Süreç yukarıdaki etkinliklerin benzeri şekilde karenin alanının değşiminin incelenmesi, bir ikinci dereceden gerçel değerli tek değişkenki fonksiyonun elde edilmesi yine değişim üzerinden incelenir. Bir polinom fonksiyonu bir bağlamsal problem üzerinde aşağıdaki gibi tartışılabilir.

“Bir kenarı dere kıyısı olmak üzere, dikdörtgen şeklinde bir arsa çevirmeniz ve arsanın etrafına bir duvar örmeniz gerekmektedir. Dereyi kıyısına duvar yapmayacaksınız. Diğer üç kenarın duvarı metre başına beş YTL'ye mal oluyor. Arsanın dördüncü kenarını teşkil eden yani dere kenarında düzeltme için metre başına 1 (bir) YTL harcamalısınız. Harcamak için toplam 180 YTL'niz olduğuna göre inşaa edeceğiniz arsanın alanının maksimum olması için boyutları ne olmalıdır?” (Edwards ve Penney, 2001)

Problemde ipucu yine fonksiyon kavramıdır. Öğreticinin hazırlayacağı maple worksheet’ler bu bakışı kazandırabilir (Şekil 7 , 8).

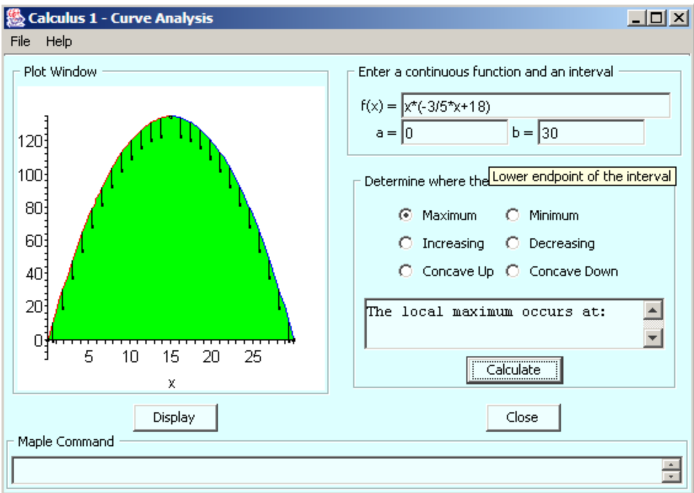


Şekil 7



Şekil 8

Tartışma aşağıdaki maplet (Şekil 9) üzerinde de sürdürülebilir.



Şekil 9

x 'in hangi değeri için arsanın alanı 100 birim kare olurdu? Bu durumu nasıl araştırırsınız? Şeklindeki sorularla çalışma sürdürülür. Bu çalışmalarla öğrencilerin bağlamsal problem üzerinden kavramın ele alınmasımı sağlanır.

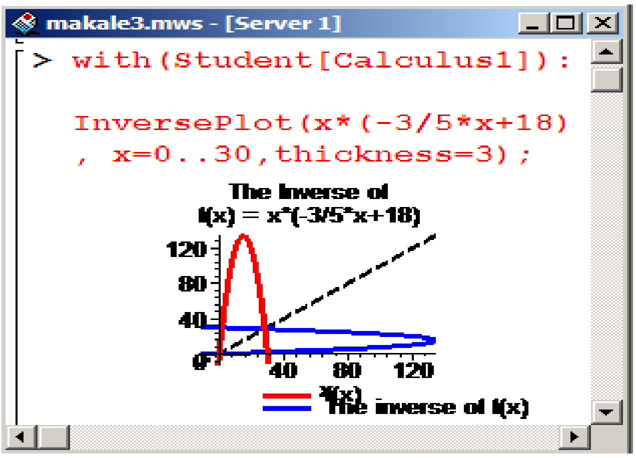
Süreç yukarıdaki etkinliklerin benzeri kübün yüzey alanı ve hacmindeki değişimin incelenmesi; üçüncü derece denklem ve fonksiyonlar, polinom denklem ve fonksiyonlarının grafiklerinin incelenmesi problem çözme etkinlikleri ile anlama kavuşur.

Vol: 3 No: 1 Year: 2022

journal homepage: https://www.ojomste.com/index.php/1

Bir polinom fonksiyonu derecesi ve kökler üzerindeki tartışmalar öğrenenin çizdireceği çeşitli grafiklerle daha kolay anlaşılabilir hale gelir. Polinom fonksiyonlarının özellikleri ezberlenecek notlar şeklinde değil değişik problemlerle deneyimler sonucu öğrenenin kendisinin çıkarımlarda bulunacağı bir ortamla oluşturma imkanı verilmiş olur.

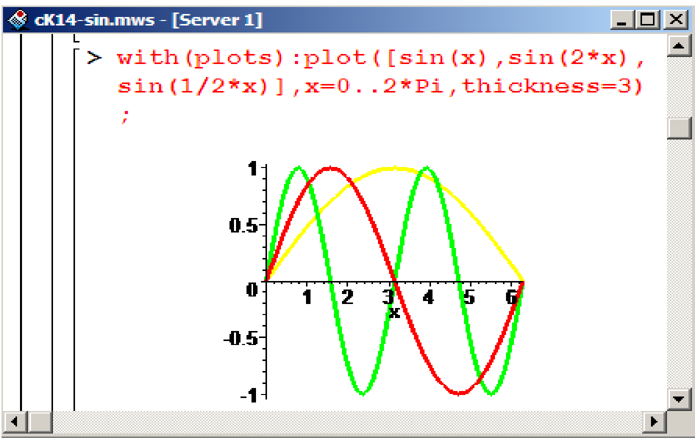
Değişim bir fonksiyon olarak otaya atılırken ters fonksiyon kavramıda sorgulanabilir. Maplet'ler veya temel komut becerileri şekil 10 'deki gibi oluşturulabilir. Normal olarak bu fonksiyonu çizmek için bilinmesi gereken birçok özellik gerekir. BCS ile durumu daha iyi tartışma fırsatı verir.



Şekil 10

Etkinlik 4:

Cebirsel olmayan fonksiyonların incelenmesinde örneğin, periyodik olayları incelemek için Genel matematik dersinde trigonometrik fonksiyonlar önemli bir yer tutar. Bu birçok trigonometrik özelliğin bilinmesini ve hatırda tutulmasını gerektirir. BCS çeşitli alternatifler sunar. Örneğin periyotu şekildeki çalışma sayfasında (Şekil 11) tartışabiliriz.



Şekil 11

$\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(\frac{1}{2}x)$ görüldüğü üzere her üçünde de tanım kümesi 0 <= x < 2π arasında. Değer kümesi ise -1 ve + arasında değişir.

sin(2x) ise periyot nasıl değişir? Bu durumda periyot;

$f(x+T) = f(x)$ den

$f(2(x+T)) = f(\sin(x))$

$f(\sin(2(x+T)) = f(\sin(2x+2\pi))$

$\sin(2x+2T) = \sin(2x+2\pi)$

$2T = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} \rightarrow T = \pi$ Bu yüzden sin(2x); sin(x) den 2 defa daha fazla salınır.

Aynı şekilde incelendiğinde $\sin(\frac{1}{2}x)$; sin(x) den 2 defa eksik salınır.

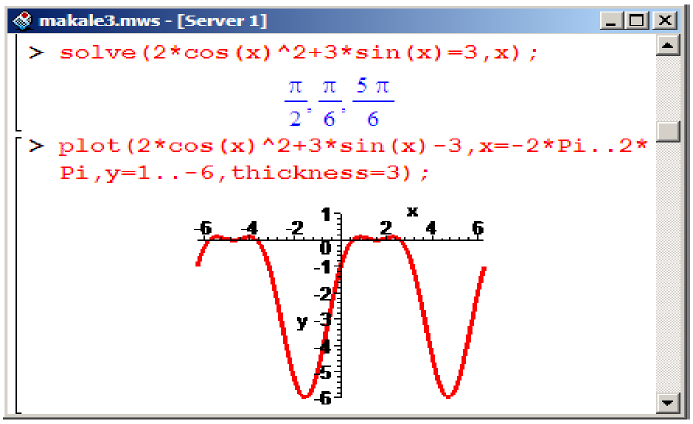
Örneğin, şimdi de $2\cos^2(x)+3\sin(x)=3$ trigonometrik denkleminin çözümünü ele alalım.

$\Rightarrow 2(1-\sin^2 x)+3\sin(x)=3 \;\Rightarrow 2\sin^2 x-3\sin(x)+1=0$

$\Rightarrow (2\sin x-1)(\sin x-1)=0$

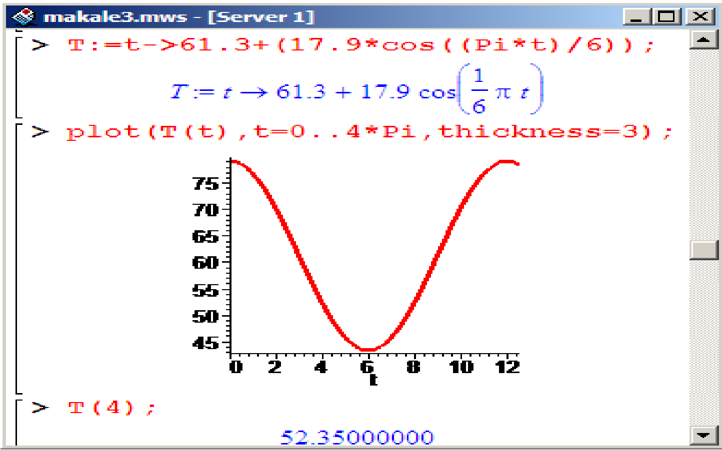
$\Rightarrow 2\sin x-1=0 \;\Rightarrow\; \sin x=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$

$\sin x-1=0 \;\Rightarrow\; \sin x=1 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{2}$



Şekil 12

Trigonometrik denklemleri polinom denklemlerden farklı yapan sonsuz çoklukta çözümlerinin oluşudur. Trigonometrik fonksiyonlarda periyodiklik ve salınım davranışlarıyla polinom fonksiyonlardan farklıdır. BCS fonksiyonların ve denklemlerin özelliklerini görselleştirerek tartışmamıza ve elde etmemize olanak sağlamaktadır.

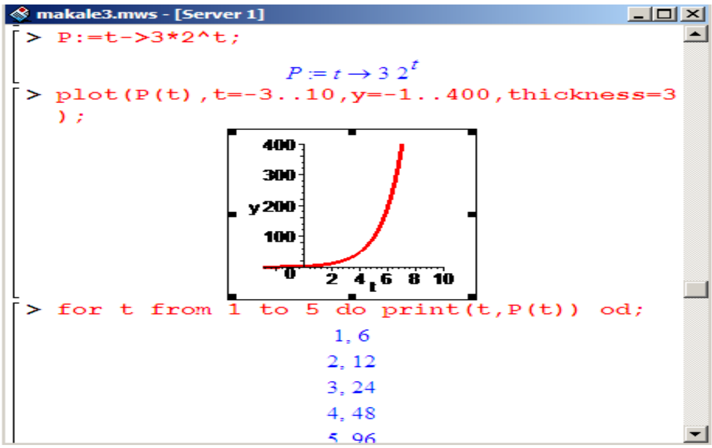


Şekil 13

Dünyamız trigonometrik fonksiyonlar gibi niceliklerle doludur. Örneğin; Amerika'da Athens (Georgia)'de yapılan ölçümlerle sıcaklığın 15 Temmuz'dan sonra 24 saatlik bir gün boyunca t ay ortalama T sıcaklığı Fahrenheit olarak $T(t) = 61.3 + 17.9(\cos\frac{\pi t}{6})$ ile veriliyor 15 Eylül yani dört ay sonra sıcaklık 52.35 F° dir (Edwards ve Penney, 2001). .

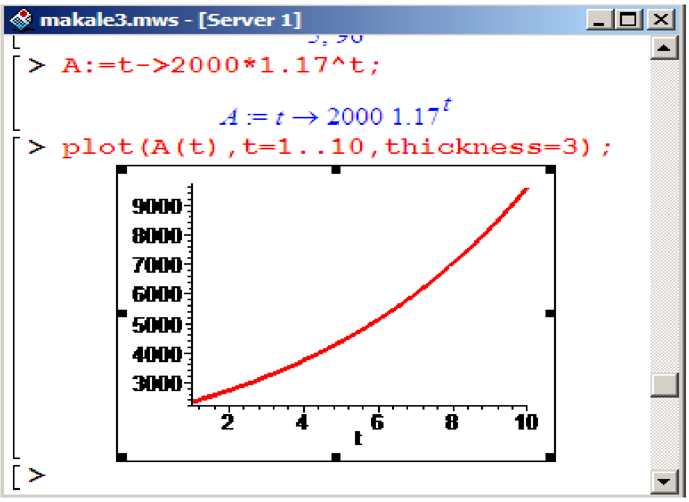
Etkinlik 5:

Zaman geçtikçe kararlı bir şekilde artan veya azalan olayları modellemek için üstel ve logaritmik fonksiyonlara ihtiyaç vardır.



Şekil 14

Örneğin, her ay iki misli artan bir bakteri topluluğunda t ay sonraki bakterilerin sayısını $P(t)$ ile ifade edelim. Başlangıçta 3 bakteri varsa t ay sonraki bakteri sayısını nasıl ifade edebiliriz. Grafik bu artışın nasıl olacağı konusunda iyi bir izlenim sağlar.



Şekil 15

Şimdi bir örnek daha inceleyelim.

Yıllık %17 bileşik faiz ödeyen bir bankaya 2000 YTL hesap açtığımızı farz edelim. Bu hesaptaki paranın sene sonunda 1.17 ile çarpılacağı anlamındadır. $A(t)$ sene sonundaki hesapta olan meblağı göstermek üzere fonksiyon $A(t) = 2000 + 1.17^t$ 'dir (Edwards ve Penney, 2001).

Meblağın 4 yıl sonra iki misline çıkacağı yorumunu yapabiliriz.

Vol: 3 No: 1 Year: 2022

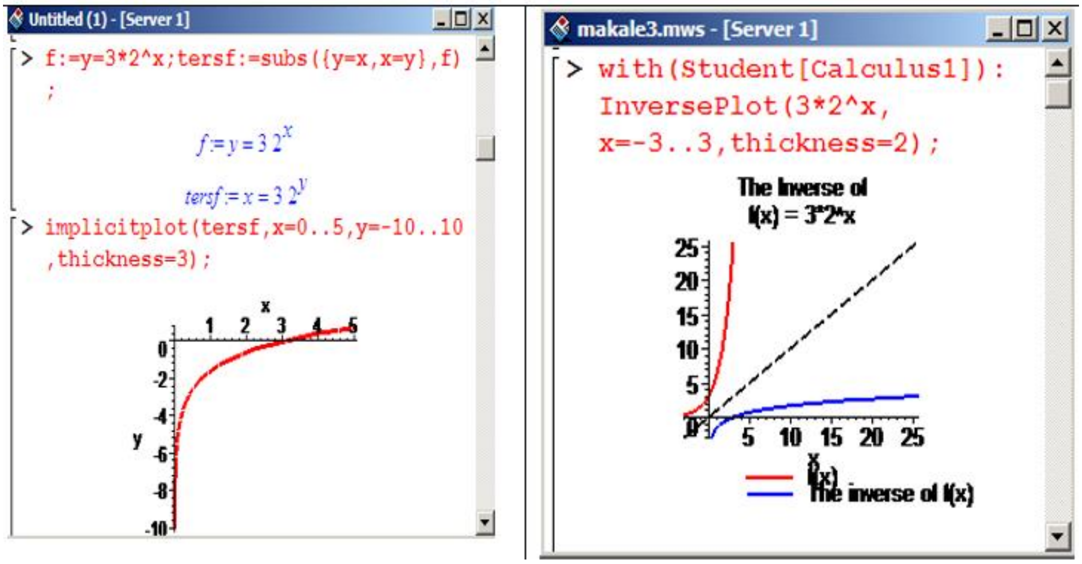
journal homepage: https://www.ojomste.com/index.php/1

Grafikleri çizip hesaplamaları yaptıktan sonra fonksiyonların özellikleri üzerinde tartışıp bir uzlaşmaya varmak gerekir. Artan, azalan, monoton artan ve azalan üzerindeki tartışmalar grafik üzerinde daha kolay yorumlanabilir.

Etkinlik 6:

Bakteriyle ilgili soru üzerinde tartışmaya devam edelim. Bu fonksiyonun tersini elde etmek istersek logaritmik fonksiyona ulaşmış oluruz.

Tüm $x \in IR$ için $0 < a^x$ olduğundan $\log_a x$, yalnızca $x > 0$ için tanımlanır. Subs ile x ile y'nin konumları değiştirilerek grafiklerin $y = x$ doğrusuna göre yansımaları görülür.



Şekil 16

$a^0 = 1$ olduğundan $\log_a 1 = 0$ bulurken eksenlerle kesişme noktalarının a 'nın seçiminden bağımsız olduğunu ve ters fonksiyon olma ilişkisinden bağıntıları elde etmeliyiz. BCS bu geçişte de olanak verir.

```
> log10(10000);
```

$$4$$

```
> log10(3);
```

$$\frac{\ln(3)}{\ln(10)}$$

```
> evalf(log10(3));
```

$$0.4771212549$$

BCS doğal logaritma ile hesaplamalar içinde uygundur.

```
> log[2](exp(1));
```

$$\frac{1}{\ln(2)}$$

Ayrıca logaritmik fonksiyonun ve üstel fonksiyonun artışları üzerinde konuşulabilir.

Lisans seviyesinde ön koşul olan bu davranışlar için bir çalışma ortaya konmuştur.

Lisans seviyesinde ön koşul olan bu davranışlar için bir çalışma ortaya konmuştur. Analizi oluşturan hesaplama teknikleri işlediğimiz örneklerdeki gibi iki temel geometrik problem etrafında gelişir. Her problem bir $y = f(x)$ fonksiyonunun belirlenmesi ve bu fonksiyonun grafiği ile başlar. Bu temel problemler eğri üzerindeki noktalarda teğet denklemlerin belirlenmesidir. Limite giriş temel bilgilerini içeren bu konular analizin temelini teşkil edecek şekilde bir başka çalışmada ele alınacaktır. Daha sonra türevin uygulamaları da analizin diferansiyel hesap dalına girişi için çalışmalar ele alınacaktır.

Sonuç

Teknoloji, insan çabasını daha etkin, daha değerli ve daha anlaşılabilir kılmak için bir araçtır. Ancak bu aracı kendi olanakları ve hedefleri doğrultusunda kullanan insanın kendisidir. BCS matematik öğrenme ve öğretmede benzersiz fırsatlar sunmaktadır. Bu fırsatı iyi değerlendirmek için, "içerik sunucu ve eğitim tasarımcısı" olarak, hedef gruplarımızı iyi tanıyıp anlamak için çaba göstermek ve ürettiklerimizi onların ihtiyaç ve yeteneklerine uygun biçimde sunmak durumundayız.

BCS öğrencileri matematikçi yapmanın, matematiksel düşünmelerini sağlamanın yanı sıra farklılıkları ve benzerlikleri kolayca fark etme becerilerini güçlendirmenin verimli bir yoludur.

Kaynakça

National Council of Teacher of Mathematics (2000) Principles and Standarts for Mathematics, Reston VA, Authors http://www.maplesoft.com/

Edwards, C.H & Penney, D. Calculus with Analytic Geometry, Printece-Hall.Inc. ISBN D-13-736331-1

Kramarsky, B. Hirsch, C. (2003) Effects of Computer Algebra System (CAS) with Metacognitive Training on Mathematical Reasoning pp: 249 – 257 (http://www.tandf.co.uk/journals)

Tuluk, G. Kaçar, A. (2007) Fonksiyon kavramının öğretiminde bilgisayar cebiri sistemlerinin etkisi, Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi, vol 15, No:1.

Vol: 3 No: 1 Year: 2022

journal homepage: https://www.ojomste.com/index.php/1

ETİK ve BİLİMSEL İLKELER SORUMLULUK BEYANI

Bu çalışmanın tüm hazırlanma süreçlerinde etik kurallara ve bilimsel atıf gösterme ilkelerine riayet edildiğini yazar(lar) beyan eder. Aksi bir durumun tespiti halinde OJOMSTE'nin hiçbir sorumluluğu olmayıp, tüm sorumluluk makale yazarlarına aittir.

ARAŞTIRMACILARIN MAKALEYE KATKI ORANI BEYANI

1. yazar katkı oranı : % 50

2. yazar katkı oranı : % 50